ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2012

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 1

Si calcoli : $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$

Soluzione 1

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$ è $nella\ forma\ indeterminata\ \frac{0}{0}$

Applicando De L'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{3\cdot 2^{3x}\cdot \ln 2 - 4\cdot 3^{4x}\cdot \ln 3}}^{-2,3}}{\underbrace{2x}_{0^+}} = -\infty$$

infatti:

$$\lim_{x\to 0^+}[3\cdot 2^{3x}\cdot \ln 2 - 4\cdot 3^{4x}\cdot \ln 3] = 3\cdot \ln 2 - 4\cdot \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3^4 = \ln\frac{8}{81} \approx -2{,}3\ .$$

Soluzione 2

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}-1+1}{x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2^{3x}-1}{x} - \frac{3^{4x}-1}{x}\right]\cdot\frac{1}{x} = -\infty$$

$infatti\ applicando\ il\ limite\ notevole:$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\quad si\ ha:$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(2^3)^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{8^x-1}{x} = \ln 8$$

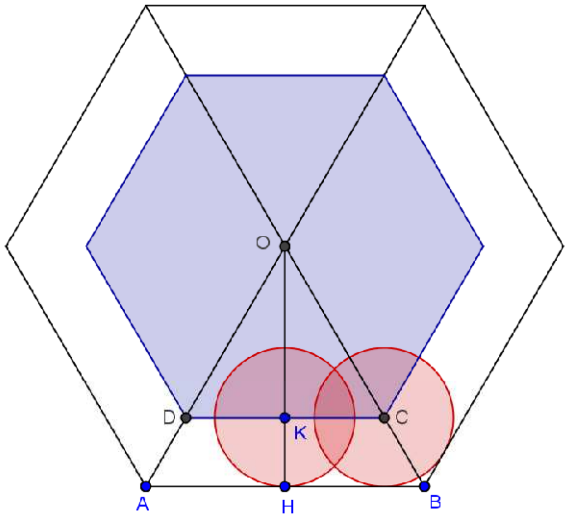
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{4x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(3^4)^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{81^x-1}{x} = \ln 81$$

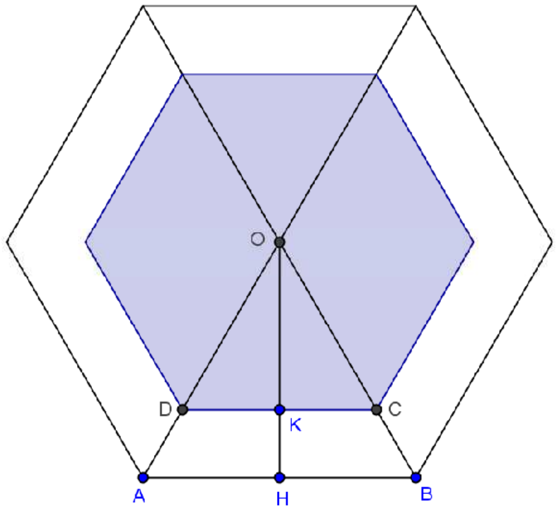
e

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

Quesito 2

Una moneta da un euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali regolari di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)





Soluzione 1

Il problema è simile al quesito n°3 dell'Esame di Stato 2008 / 2009.

La moneta cade all'interno della mattonella quando il centro della moneta cade all'interno dell'esagono interno azzurro.

Il lato dell'esagono esterno misura $\overline{AB} = 100\ mm$.

Il triangolo ABO è equilatero $\Rightarrow$ $\overline{OB} = 100\ mm$.

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 100\ mm = 50\sqrt{3}\ mm$$

L'area della mattonella è:

$$S_{Esterno} = 6 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{2} = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OH} = 3 \cdot 100 \cdot 50\sqrt{3}\ mm^2 = 15.000\sqrt{3}\ mm^2 = 25980,76\ mm^2$$

$$\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{HK} = \overline{OH} - r = \left(50\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 23,25\right) mm = 74,97754\ mm$$

$$\overline{DC} = \overline{OC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{OK} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(50\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 23,25\right) mm = \left(100 - \frac{23,25}{\sqrt{3}}\right) mm = 86,5766$$

$$S_{Interno} = 6 \cdot \frac{\overline{DC} \cdot \overline{OK}}{2} = 3 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{OK} = 3 \cdot 86,5766 \cdot 74,97754\ mm^2 = 19473,9\ mm^2$$

$$p = \frac{S_{Interno}}{S_{Esterno}} = \frac{19473,9}{25980,76} \approx 0,7496 .$$

Soluzione 2

Essendo i due esagoni due poligoni simili le aree sono proporzionali ai quadrati dei rispettivi lati e proporzionali ai quadrati delle altezze dei triangoli equilateri che formano i due esagoni. Quindi, dopo aver determinato:

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{OB} = 50\sqrt{3}\ mm \qquad e \qquad \overline{OK} = \overline{OH} - \overline{HK} = \overline{OH} - r = \left(50\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 23,25\right) mm \quad si\ ha:$$

$$p = \frac{S_{Interno}}{S_{Esterno}} = \frac{\overline{OK}^2}{\overline{OH}^2} = \frac{\left(50\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 23,25\right)^2}{\left(50\sqrt{3}\right)^2} = \frac{74,97754^{\ 2}}{7500} \approx 0,7496 .$$

Quesito 3

Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1 ?

Soluzione

La pendenza della retta tangente al grafico della funzione f in un punto $(x\,;\, f(x))$ è data dal valore della derivata della funzione calcolata nel punto x.

La funzione $f(x)$ è derivabile in tutto R .

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$:

$$m_t = f'(x) = 3^x \cdot ln\,3$$

imponiamo che esso sia uguale ad 1 :

$$3^x \cdot ln\,3 = 1\ ;$$

$$3^x = \frac{1}{ln\,3}\ ;$$

applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri si ha:

$$ln\,3^x = ln\left(\frac{1}{ln\,3}\right)\ ;$$

$$x \cdot ln\,3 = ln\left(\frac{1}{ln\,3}\right)\ ;$$

$$x \cdot ln\,3 = ln\,1 - ln(ln\,3)\ ;$$

$$x \cdot ln\,3 = -\,ln(ln\,3)\ ;$$

$$x = -\frac{ln(ln\,3)}{ln\,3} = -0{,}085606021875\ \ldots \approx -0{,}086$$

Quesito 4

L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

Il problema è simile al quesito n°5 dell'Esame di Stato 2011 / 2012.

L'insieme dei numeri naturali costituisce un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri razionali. Da questa osservazione si sarebbe portati a concludere erroneamente che: "i numeri razionali siano in numero maggiore dei numeri naturali". Invece i due insiemi, pur essendo l'uno incluso propriamente nell'altro, hanno la stessa cardinalità.

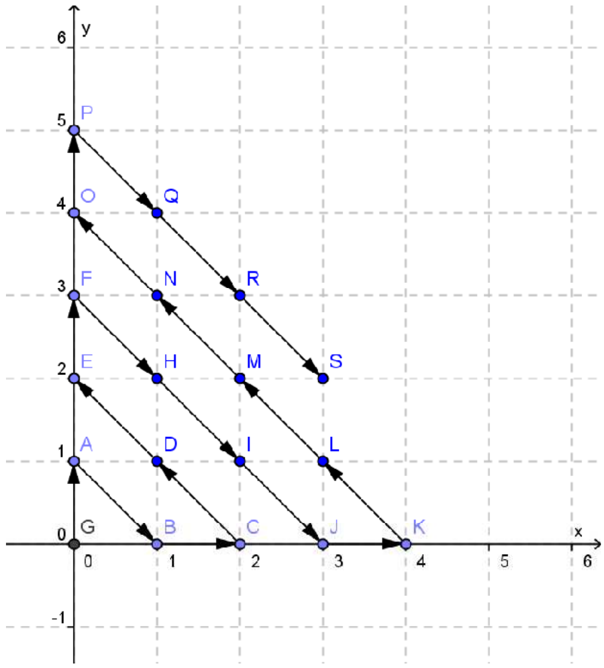
Ricordiamo che:

- *"Due insiemi A e B si dicono equicardinali o equipotenti se fra i loro elementi si può stabilire una corrispondenza biunivoca".*
- *Un insieme si dice infinito numerabile quando ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali N, ossia quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra tale insieme ed i numeri naturali. In caso contrario si parla di insieme non numerabile.*

L'insieme dei numeri razionali è numerabile, cioè esiste una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e i numeri naturali.

Questo risultato (dimostrato da Georg Cantor) si basa sul diagramma a lato:

È possibile ordinare i razionali positivi, seguendo le frecce, in modo che ad ognuno di essi sia assegnato un numero naturale (anzi, ogni numero sarà contato infinite volte, perché ognuno ha un'infinità di rappresentazioni diverse $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} =$ *...)*



La corrispondenza biunivoca è la seguente:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...				
Q	$(0;0)$	$(0;1)$	$(1;0)$	$(2;0)$	$(1;1)$	$(0;2)$	$(0;3)$	$(1;2)$	$(2;1)$	$(3;0)$	$(4;0)$	$(3;1)$	...				

Procedendo in maniera analoga si dimostra che i numeri razionali negativi sono numerabili.

Poiché l'unione di due insiemi numerabili è ancora numerabile, si conclude che l'insieme dei numeri razionali è numerabile.

Quindi L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti.

Quesito 5

Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots., P_N$.

Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due ?

Quanti sono i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata) ?

Quanti sono i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare) ?

Soluzione 1

Il numero dei segmenti che li congiungono a due a due è uguale alla somma fra il numero delle diagonali di un poligono di n lati e gli n lati.

Pertanto essi sono in numero:

$$k = \frac{n \cdot (n-3)}{2} + n = \frac{n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

Oppure

Dato che un segmento è univocamente determinato da due punti (i due estremi), occorre determinare il numero di coppie di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Soluzione 2

Dato che un triangolo è univocamente determinato da tre punti (i tre vertici), occorre determinare il numero di terne di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}.$$

Soluzione 3

Dato che un tetraedro è univocamente determinato da quattro punti (i quattro vertici), occorre determinare il numero di quaterne di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}.$$

Quesito 6

Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

Soluzione

Ricordiamo che:

"Ogni cubica ha uno ed un solo flesso ed è simmetrica rispetto al suo flesso".

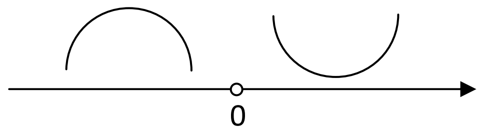
La funzione $f(x) = x^3 + ax + b$ *è definita, continua e derivabile in tutto* R *.*

$f'(x) = 3x^2 + a$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0 \qquad per \quad x > 0$

$f''(x) < 0 \qquad per \quad x < 0$



Dall'esame del segno della derivata seconda si deduce che il punto $F(0\,;b)$ *è l'unico punto di flesso della cubica.*

Per verificare che la curva data è simmetrica rispetto al punto di flesso F occorre applicare le equazioni della simmetria centrale e verificare che la sua equazione non cambia.

$\begin{cases} x' = 2x_F - x \\ y' = 2y_F - y \end{cases}$ $\quad cioè: \quad$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ $\quad da\ cui\ le\ equazioni\ inverse: \quad$ $\begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$

$y = x^3 + ax + b\,;$ $\qquad 2b - y' = (x')^3 + ax' + b\,;$

$-y' = \left(-x'\right)^3 + a\left(-x'\right) + b - 2b\,;$ $\qquad -y' = -x'^3 - ax' - b$

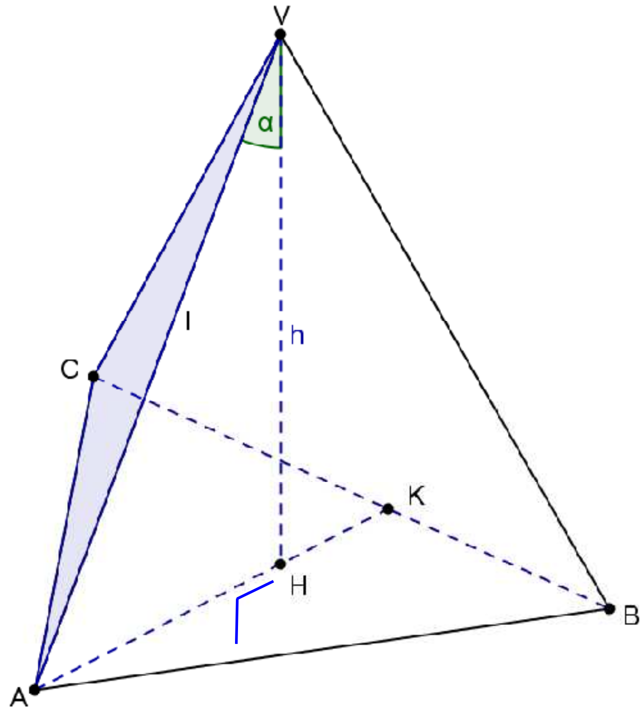
$y' = x'^3 + ax' + b$

Pertanto la curva è simmetrica rispetto al suo punto di flesso $F(0\,;b)$*.*

Quesito 7

È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h

Soluzione



Il tetraedro regolare è una piramide retta avente per facce quattro triangoli equilateri.

L'altezza del tetraedro VH cade nel baricentro del triangolo equilatero ABC.

Per un teorema di geometria il baricentro divide la mediana AK in due segmenti tali che quello contenente il vertice è il doppio dell'altro, cioè: $\overline{AH} = 2\overline{HK}$

$Essendo\ ABC\ \ un\ triangolo\ equilatero\ si\ ha$: $\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$Pertanto$: $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{3} l$

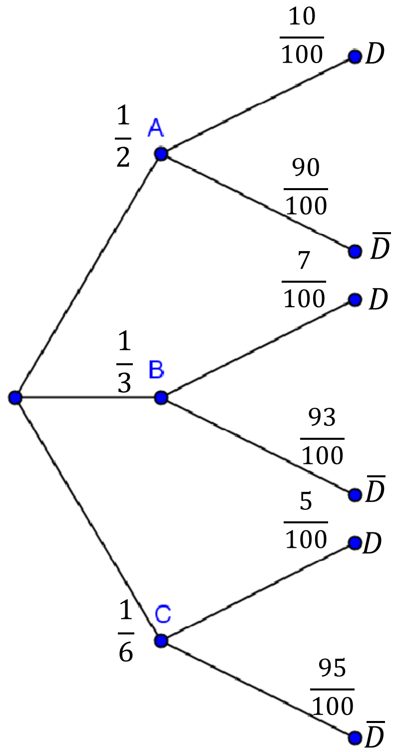
$Essendo\ AVH\ \ un\ triangolo\ rettangolo\ nel\ piede\ dell'altezza\ H\ si\ ha$: $\sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AV}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$Da\ cui\ si\ ottiene$: $\alpha = arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} = 35{,}26438968\ldots° \approx 35{,}26°$.

Quesito 8

Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A ?

Soluzione



Indichiamo con $P(D)$ *la probabilità che il pezzo sia difettoso.*

Dall'esame del grafico, per il teorema della probabilità totale, si ha:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{7}{300} + \frac{5}{600} = \frac{30+14+5}{600} = \frac{49}{600}$$

Per il teorema di Bayes si ha:

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C)} =$$

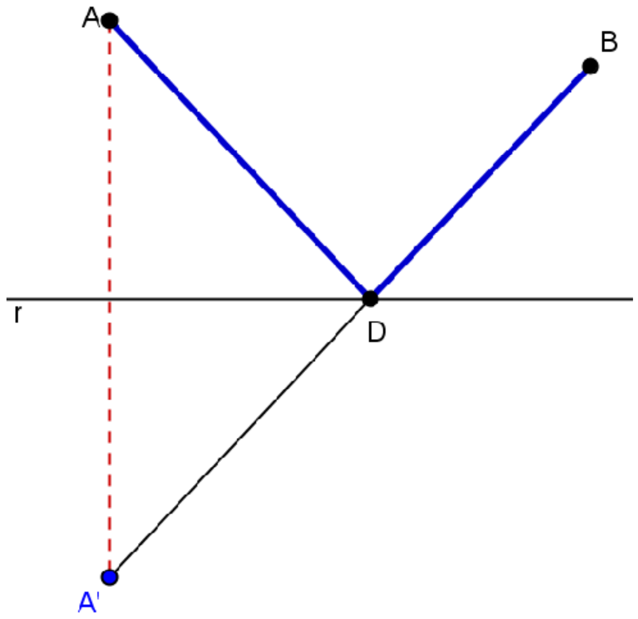
$$= \frac{\frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{49}{600}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{49}{600}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{600}{49} = \frac{30}{49} \approx 0{,}612 .$$

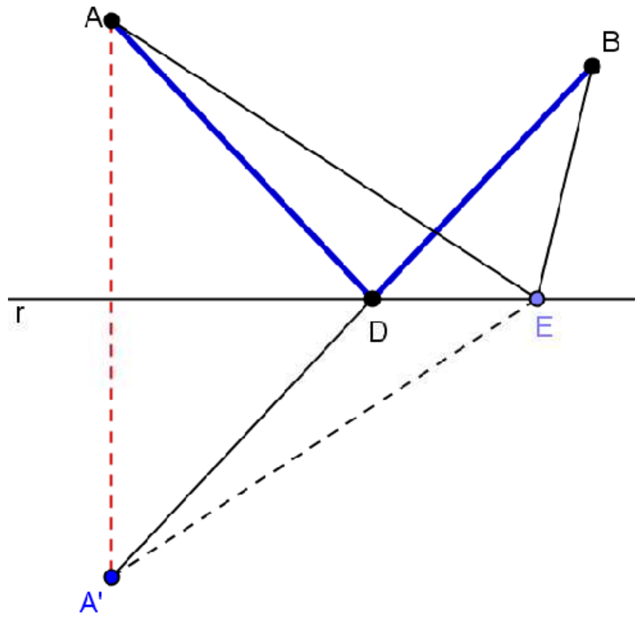
Quesito 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Soluzione

Il problema è uguale al quesito n°3 dell'Esame di Stato 2005 / 2006.





Costruiamo il simmetrico del punto A *rispetto alla retta* r.

Se si considerano i punti A' *e* B, *anziché* A *e* B, *il minimo cammino che li congiunge è il segmento che li ha per estremi, cioè:* $A'B \cong A'D + DB$

Ma $A'D \cong AD \quad \Rightarrow \quad A'B \cong AD + DB$

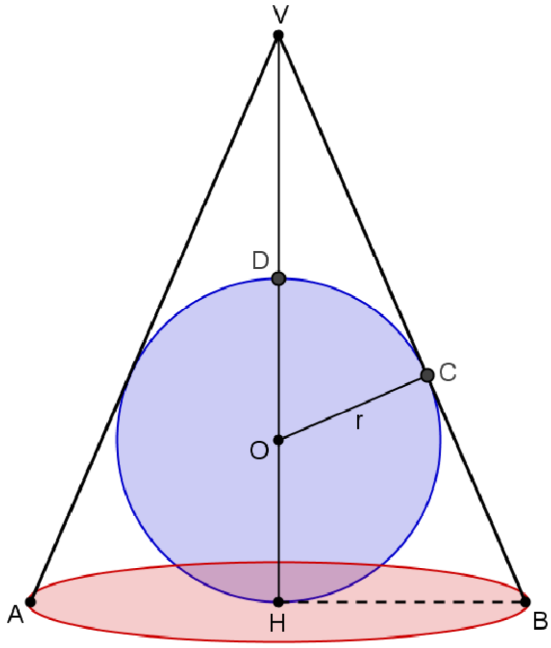
Pertanto il più breve cammino che congiunge A *con* B *toccando* r *è* $AD + DB$.

Infatti prendendo un qualsiasi altro punto E *sulla retta* r, *per la nota disuguaglianza triangolare (in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo), si ha che:*

$AE + EB \cong A'E + EB > A'B \cong A'D + DB \cong AD + DB$.

Quesito 10

Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.



Soluzione

Ponendo $\overline{VD} = x$ *con il limite geometrico* $x > 0$ *si ha:*

$\overline{VH} = x + 2r$

$\overline{VO} = x + r$

$\overline{VC} = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}$

Dalla similitudine dei triangoli VOC *e* VHB *si ha:*

$\overline{VO} : \overline{VB} = \overline{VC} : \overline{VH}$

$(x+r) : \overline{VB} = \sqrt{x^2+2rx} : (x+2r)$

$$\overline{VB} = \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Dalla similitudine dei triangoli VOC *e* VHB *si ha inoltre:*

$\overline{VC} : \overline{VH} = \overline{OC} : \overline{HB}$

$\sqrt{x^2 - 2rx} : (x+2r) = r : \overline{HB}$

$$\overline{HB} = \frac{r \cdot (x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Pertanto la superficie laterale è:

$$S = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB} = \pi \cdot \frac{r \cdot (x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}} \cdot \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}} = \pi \cdot \frac{r \cdot (x+2r)^2 (x+r)}{x \cdot (x+2r)} \; ;$$

$$S = \pi r \cdot \frac{x^2 + 3rx + 2r^2}{x}$$

Trascurando la costante positiva πr *, la superficie laterale è minima quando è minima la funzione:*

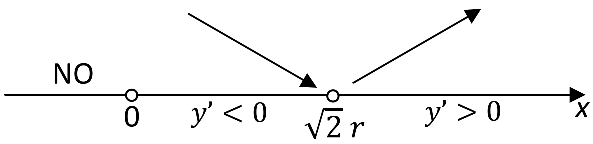
$$y = \frac{x^2 + 3rx + 2r^2}{x}$$

La funzione, per il limite geometrico, è definita per $x > 0$ *.*

$$y' = \frac{(2x+3r) \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 3rx + 2r^2)}{x^2} = \frac{2x^2 + 3rx - x^2 - 3rx - 2r^2}{x^2} = \frac{x^2 - 2r^2}{x^2}$$

$$y' \geq 0 : \qquad \frac{x^2 - 2r^2}{x^2} \geq 0 \; ; \qquad x^2 - 2r^2 \geq 0 \; ; \qquad x \leq -\sqrt{2}\, r \;\vee\; x \geq +\sqrt{2}\, r$$

Pertanto considerando il limite geometrico: $x > 0$ *si ha :*



Resta pertanto dimostrato quanto richiesto, cioè che: "il cono circolare retto circoscritto ad una sfera di raggio r *di area laterale minima ha il vertice che dista* $r\sqrt{2}$ *dalla superficie sferica".*