ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2012

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 1

Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

Soluzione

Il limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = 5x^4$ *calcolato nel punto* $x = \frac{1}{2}$.

cioè la derivata della funzione $f(x) = 5x^4$ *calcolata nel punto* $x = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo il suo valore

$$\lim_{h\to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2}+h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 \cdot \frac{\left(h^2 + h + \frac{1}{2}\right) \cdot (h^2 + h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 \cdot \frac{h \cdot \left(h^2 + h + \frac{1}{2}\right) \cdot (h+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 5 \cdot \left(h^2 + h + \frac{1}{2}\right) \cdot (h+1) \quad = \quad 5 \cdot \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{5}{2}\ .$$

Quesito 2

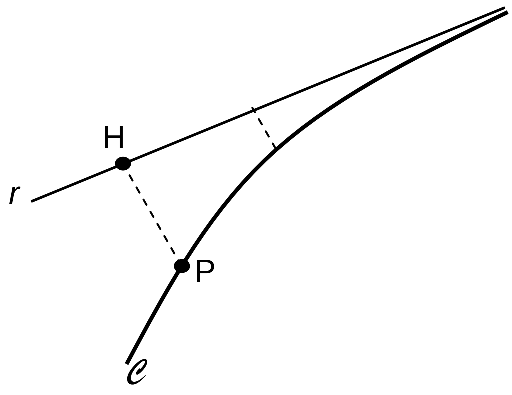
Si illustri il significato di asintoto e si fornisca un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

<u>Soluzione</u>

Il significato di asintoto è illustrato nel seguente articolo, sotto riassunto:

http://www.mimmocorrado.it/mat/ana/funzioni/analisimatematica2.pdf

Una retta r è detta asintoto della curva $\mathcal{C}$ se la distanza PH tra il generico punto $P \in \mathcal{C}$ e la retta r tende a zero allorchè il punto P si allontana indefinitivamente sulla curva $\mathcal{C}$, tendendo a un suo punto all'infinito.



Asintoti verticali

$$\left(\text{Se } \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\text{la retta } x = c \text{ è Asintoto Verticale} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Se } x \to c^+ & \Rightarrow & \text{la retta } x = c \text{ è Asintoto Verticale a destra} \\ \text{Se } x \to c^- & \Rightarrow & \text{la retta } x = c \text{ è Asintoto Verticale a sinistra} \end{array} \right)$$

Asintoti orizzontali

$$\left(\text{Se } \lim_{x \to \infty} f(x) = k \quad (k \neq \infty) \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\textbf{la retta } y = k \textbf{ è Asintoto Orizzontale} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Se } x \to +\infty & \Rightarrow & \text{la retta } y = k \text{ è Asintoto Orizzontale a destra} \\ \text{Se } x \to -\infty & \Rightarrow & \text{la retta } y = k \text{ è Asintoto Orizzontale a sinistra} \end{array} \right)$$

Asintoti obliqui

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q \neq \infty \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\text{la retta } y = mx + q \text{ è Asintoto Obliquo} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Se } x \to +\infty & \Rightarrow & \text{la retta } y = mx + q \text{ è Asintoto Obliquo a destra} \\ \text{Se } x \to -\infty & \Rightarrow & \text{la retta } y = mx + q \text{ è Asintoto Obliquo a sinistra} \end{array} \right)$$

Osservazioni

Le funzioni algebriche razionali intere non hanno asintoti di alcun genere.

Le funzioni algebriche razionali fratte hanno:

tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri del denominatore;

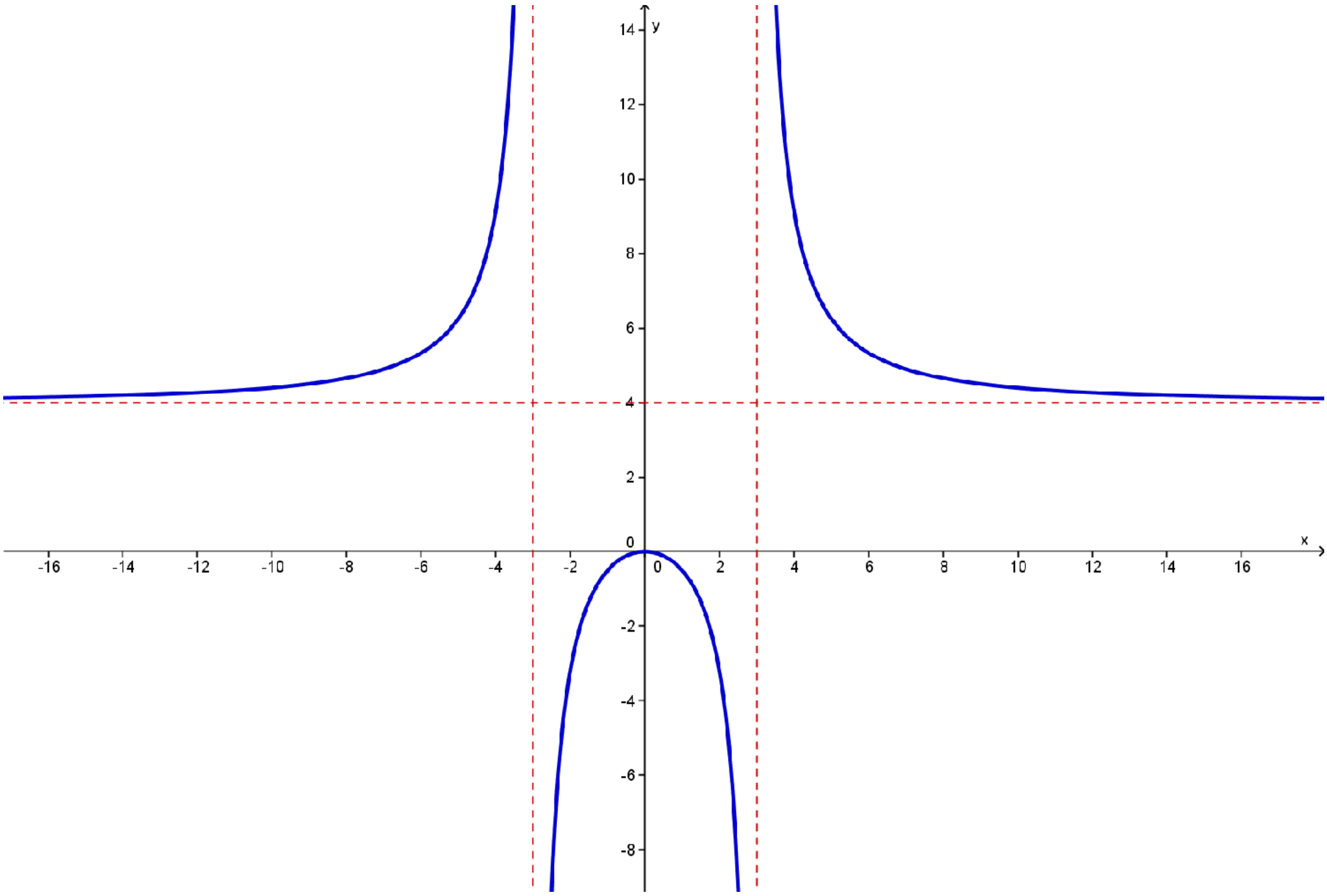
un asintoto orizzontale quando il grado del numeratore è minore o uguale a quello del denominatore

un asintoto obliquo quando il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore.

Pertanto, un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali è dato da:

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 9}$$

La funzione ha due asintoti verticali $x = -3$ *e* $x = +3$ *e un asintoto orizzontale* $y = 4$ *.*



Quesito 3

La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2\,e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$ *. Qual è la sua accelerazione al tempo* $t = 4$ *?*

Soluzione

L'accelerazione al tempo $t = 4$ *è la derivata seconda della funzione oraria* $s(t)$ *calcolata in* $t = 4$ *.*

$$v(t) \;=\; s'^{(t)} \;=\; 20\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\,e^{-\frac{t}{2}} + 1\right) \;=\; -20\left(e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)$$

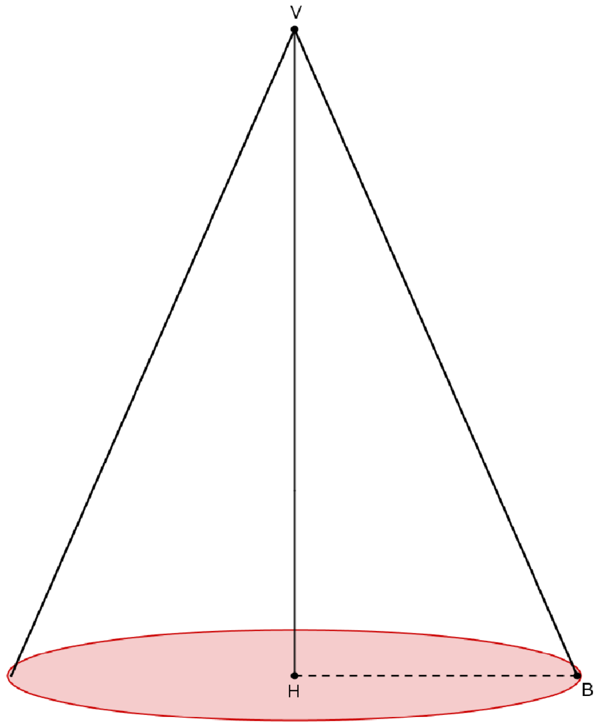
$$a(t) \;=\; s''^{(t)} \;=\; -20\left(-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{2}}\right) \;=\; 10\,e^{-\frac{t}{2}}$$

L'accelerazione al tempo $t = 4$ *vale :*

$$s''^{(4)} = 10\,e^{-\frac{4}{2}} = 10\,e^{-2} = \frac{10}{e^2}\ .$$

Quesito 4

Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro ?



Soluzione

Il problema è simile al quesito n°4 dell'Esame di Stato 2006 / 2007

Ponendo $\overline{VH} = x$ *con i limiti geometrici* $0 < x < 1$ *si ha:*

$\overline{HB} = \sqrt{1 - x^2}$

La capacità del cono è data dal suo volume:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot x \cdot (1 - x^2)$$

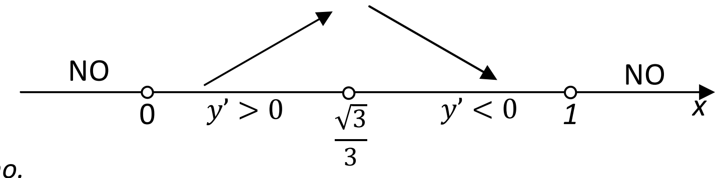
Trascurando la costante positiva $\frac{1}{3}\pi$ *, il volume è massimo quando è massima la funzione:* $y = x \cdot (1 - x^2)$

La funzione, per i limiti geometrici, è definita per $0 < x < 1$

$y' = 1 - 3x^2$

$y' \geq 0$ *per* $1 - 3x^2 \geq 0;\quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq +\frac{\sqrt{3}}{3}$

Pertanto considerando i limiti geometrici: $0 < x < 1$ *si ha :*



Pertanto per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *il volume è massimo.*

Esso vale:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) m^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) m^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} m^3 = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi\, m^3 \approx 0{,}403\, m^3 \approx 403\; litri\,.$$

Quesito 5

Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$.

Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due ?

Quanti sono i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata) ?

Quanti sono i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare) ?

Soluzione 1

Il numero dei segmenti che li congiungono a due a due è uguale alla somma fra il numero delle diagonali di un poligono di n lati e gli n lati.

Pertanto essi sono in numero:

$$k = \frac{n \cdot (n-3)}{2} + n = \frac{n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

Oppure

Dato che un segmento è univocamente determinato da due punti (i due estremi), occorre determinare il numero di coppie di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 - n}{2} .$$

Soluzione 2

Dato che un triangolo è univocamente determinato da tre punti (i tre vertici), occorre determinare il numero di terne di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} .$$

Soluzione 3

Dato che un tetraedro è univocamente determinato da quattro punti (i quattro vertici), occorre determinare il numero di quaterne di punti che si possono formare con n punti (Combinazioni semplici):

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} .$$

Quesito 6

Sia $f(x) = 5\sin x\cos x + cos^2 x - sin^2 x - \frac{5}{2}\sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

Soluzione 1

$$f'(x) = 5(cos\,x\,cos\,x - sin\,x\,sin\,x) - 2\,cos\,x\,sin\,x - 2\,sin\,x\,cos\,x - \frac{5}{2}\cdot 2\,cos\,2x + 2\,sin\,2x =$$

$$= 5\,cos^2 x - 5\,sin^2 x - 4\,sin\,x\,cos\,x - 5\,cos\,2x + 2\,sin\,2x =$$

$$= 5\,cos^2 x - 5\,sin^2 x - 4\,sin\,x\,cos\,x - 5(cos^2 x - sin^2 x) + 2\cdot 2\,sin\,x\cos x =$$

$$= 5\,cos^2 x - 5\,sin^2 x - 5\,cos^2 x + 5\,sin^2 x =$$

$$= 0$$

Soluzione 2

Prima di calcolare la derivata, semplifichiamo la funzione:

$f(x) = 5\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - sin^2 x - \frac{5}{2} sin\,2x - cos\,2x - 17$;

$f(x) = 5\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - sin^2 x - \dfrac{5}{2}\cdot 2\,sin\,x\cos x - (cos^2 x - sin^2 x) - 17$;

$f(x) = 5\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x - sin^2 x - 5\,sin\,x\cos x - cos^2 x + sin^2 x - 17$;

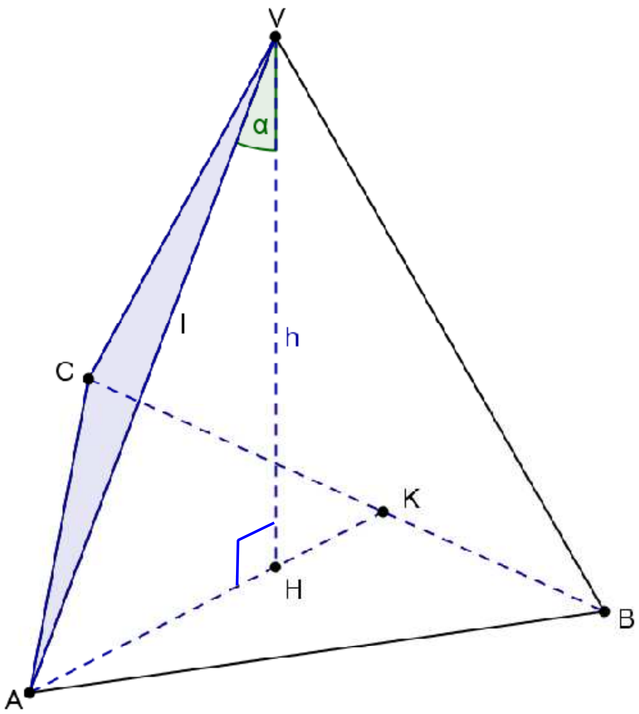
$f(x) = -17$;

Pertanto la derivata di $f(x) = -17$ *è* $f'(x) = 0$.

Quesito 7

È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h

Soluzione



Il tetraedro regolare è una piramide retta avente per facce quattro triangoli equilateri.

L'altezza del tetraedro VH cade nel baricentro del triangolo equilatero ABC.

Per un teorema di geometria il baricentro divide la mediana AK in due segmenti tali che quello contenente il vertice è il doppio dell'altro, cioè: $\overline{AH} = 2\overline{HK}$

$Essendo\ ABC\ \ un\ triangolo\ equilatero\ si\ ha$: $\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$Pertanto$: $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{3} l$

$Essendo\ AVH\ \ un\ triangolo\ rettangolo\ nel\ piede\ dell'altezza\ H\ si\ ha$: $\sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AV}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$Da\ cui\ si\ ottiene$: $\alpha = arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} = 35{,}26438968\ldots° \approx 35{,}26°$.

Quesito 8

Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ *è continua nell'intervallo* $[1\,,\ e]$.

Pertanto esiste almeno un punto $z \in [1\,,\ e]$ *tale che:* $f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

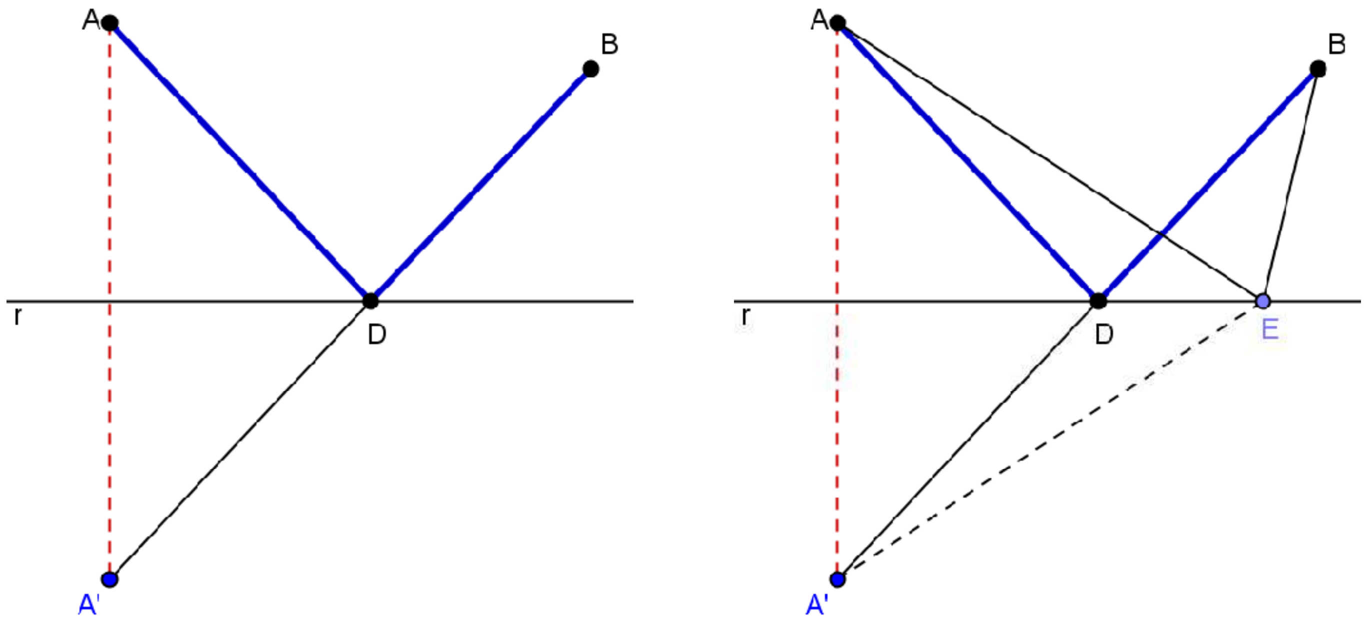
$$f(z) = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{e-1}\cdot[\ln x]_1^e = \frac{1}{e-1}\cdot(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{e-1}\cdot(1-0) = \frac{1}{e-1}\,.$$

Quesito 9

Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

Soluzione

Il problema è uguale al quesito n°3 dell'Esame di Stato 2005 / 2006.



Costruiamo il simmetrico del punto A rispetto alla retta r.

Se si considerano i punti A' e B, anziché A e B, il minimo cammino che li congiunge è il segmento che li ha per estremi, cioè: $A'B \cong A'D + DB$

Ma $A'D \cong AD \quad \Rightarrow \quad A'B \cong AD + DB$

Pertanto il più breve cammino che congiunge A con B toccando r è $AD + DB$.

Infatti prendendo un qualsiasi altro punto E sulla retta r, per la nota disuguaglianza triangolare (in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo), si ha che:

$AE + EB \cong A'E + EB > A'B \cong A'D + DB \cong AD + DB$.

Quesito 10

Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale ?

A) $cos\ (sin\ (x^2+1))$ *B)* $sin\ (cos\ (x^2+1))$

B) $sin\ (ln\ (x^2+1))$ *D)* $cos\ (ln\ (x^2+1))$

Si giustifichi la risposta.

Soluzione

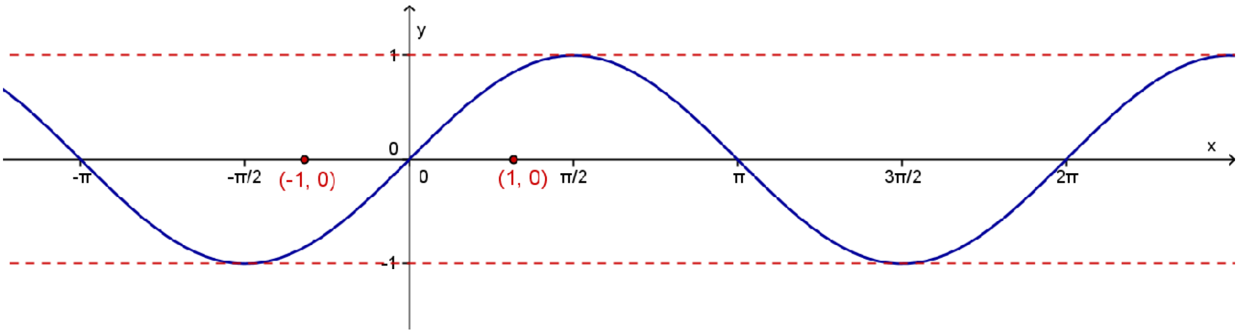
A. La funzione $y = cos\ (sin\ (x^2+1))$ *è positiva per ogni x reale.*

Infatti:

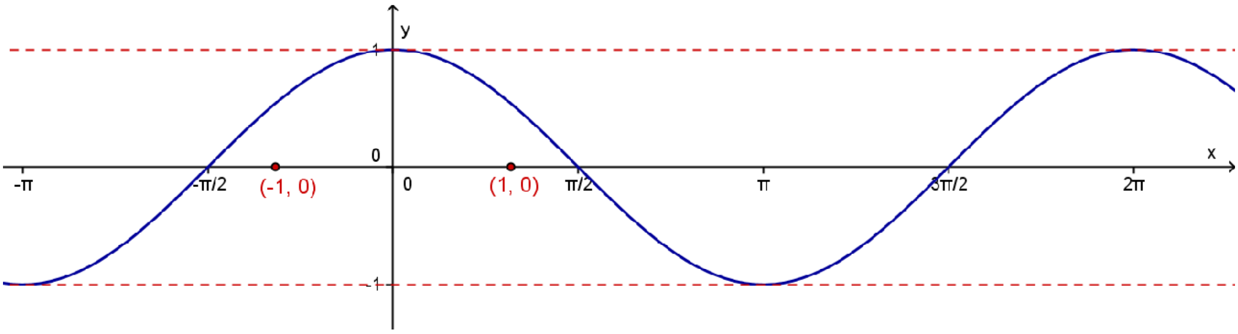
La funzione coseno è tale che $-1 \leq sin\ (x^2+1) \leq +1 \qquad \forall x \in R$

e in questo intervallo $[-1\,,+1]$ *la funzione* $cos\ (sin\ (x^2+1))$ *assume sempre valori positivi, come si evince dal grafico della funzione coseno.*

$y = sin\,x$



$y = cos\,x$



B. La funzione $y = sin\ (cos\ (x^2+1))$ *non è positiva per ogni x reale.*

Infatti:

La funzione coseno è tale che $-1 \leq cos\ (x^2+1) \leq +1 \qquad \forall x \in R$

Ma in questo intervallo $[-1\,,+1]$ *la funzione* $sin\ (cos\ (x^2+1))$ *assume sia valori positivi sia negativi.*

C. *La funzione* $y = sin\ (ln\ (x^2+1))$ *non è positiva per ogni x reale.*

Infatti:

La funzione $ln\ (x^2+1)$ *è tale che* $0 \leq ln\ (x^2+1) < +\infty \qquad \forall x \in R$

Ma in questo intervallo $[0\ ,+\infty[$ *la funzione* $sin\ (ln\ (x^2+1))$ *assume sia valori positivi sia negativi.*

D. *La funzione* $y = cos\ (ln\ (x^2+1))$ *non è positiva per ogni x reale.*

Infatti:

La funzione $ln\ (x^2+1)$ *è tale che* $0 \leq ln\ (x^2+1) < +\infty \qquad \forall x \in R$

Ma in questo intervallo $[0\ ,+\infty[$ *la funzione* $cos\ (ln\ (x^2+1))$ *assume sia valori positivi sia negativi.*