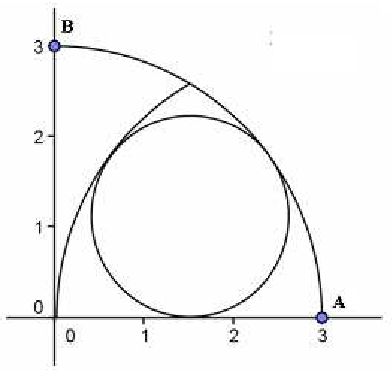
Problema 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3, 0) e B(0, 3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0, 3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



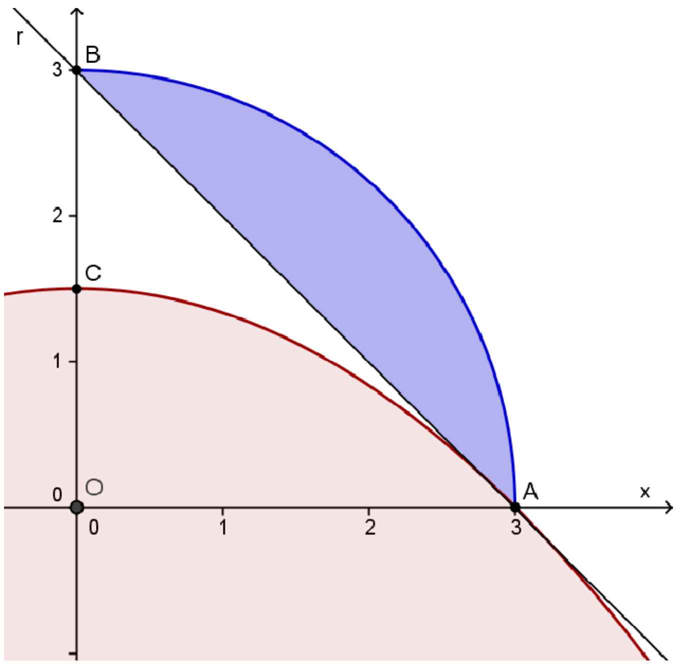
Punto 1

La retta tangente r *alla parabola di equazione* $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$ *nel suo punto* $A(3;0)$ *ha coefficiente angolare* $m = f'(3) = -\frac{1}{3}\cdot 3 = -1$.

L'equazione della retta tangente r *è pertanto:*

$y - 0 = -1(x-3)$ *cioè* $y = -x + 3$

Essa passa per i punti $A(3;\ 0)$ *e* $B(0;\ 3)$.



L'area del segmento circolare AB *(parte in azzurro) è:*

$$S_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2} = \frac{\pi\cdot 3^2}{4} - \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9\pi - 18}{4}$$

L'area del triangolo curvilineo ABC (parte in bianco) è:

$$S_{\widehat{ABC}} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2} - \frac{2}{3}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OC} =$$

$$= \frac{3\cdot 3}{2} - \frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Punto 2