M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2012

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = \left|27x^3\right| \quad e \quad g(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

<u>*Punto 1*</u>

Il periodo T della funzione $g(x)$ si determina uguagliando l'argomento della funzione a 2π. Pertanto si ha:

$$\frac{3}{2}\pi T = 2\pi \, ; \qquad T = 2\pi \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{4}{3} \, .$$

$$f(x) = |27x^3| = \begin{cases} +27x^3 & se \;\; x \geq 0 \\ -27x^3 & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

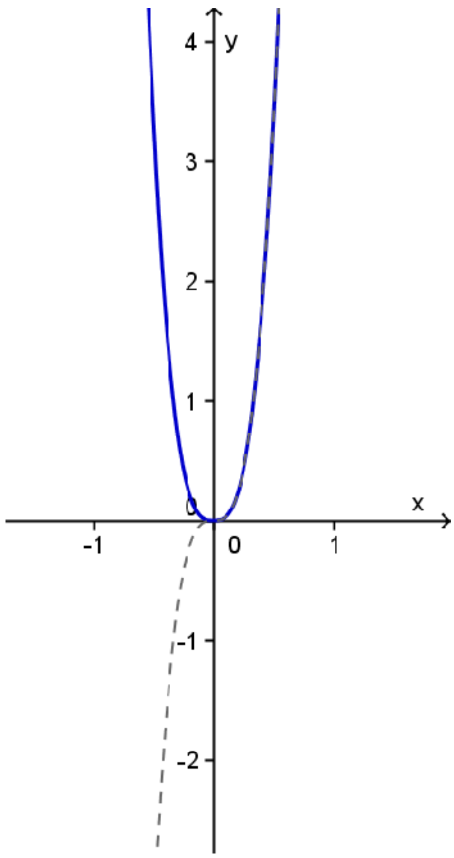
$f(x) = |27x^3|$ *è una funzione pari, cioè simmetrica rispetto l'asse y.*

Il grafico di $f(x) = |27x^3|$ *si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse x, la parte negativa della cubica* $f(x) = 27x^3$ *.*

$f(x) = 27x^3$ *è una cubica che tocca gli assi cartesiani solo nell'origine* $O(0;0)$ *e ha un flesso a tangente orizzontale in* $O(0\,;0)$ *.*

$$\lim_{n \to -\infty} 27x^3 = -\infty \qquad e \qquad \lim_{n \to +\infty} 27x^3 = +\infty$$

Il grafico è rappresentato a lato.



$g(x) = sin\frac{3}{2}\pi x$ *è una funzione goniometrica di periodo* $T = \frac{4}{3}$.

Pertanto, conviene studiarla nell'intervallo $\left[0\,;\,\frac{4}{3}\right]$

Intersezione con gli assi:

$\begin{cases} y = sin\frac{3}{2}\pi x \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} sin\frac{3}{2}\pi x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{2}\pi x = k\pi \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2}{3}k \\ y = 0 \end{cases}$ $con\ k \in Z$ $\Rightarrow$ $P_1\ (0\,;\,0)\ ;\ P_2\left(\frac{2}{3}\,;\,0\right)\ ;\ P_2\left(\frac{4}{3}\,;\,0\right)$

$\begin{cases} y = sin\frac{3}{2}\pi x \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $O\ (0\,;0)$

$g'(x) = \frac{3}{2}\pi \cdot cos\frac{3}{2}\pi x$

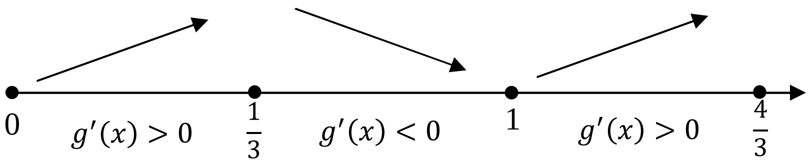
$g'(x) = 0$: $\frac{3}{2}\pi \cdot cos\frac{3}{2}\pi x = 0\,;$ $cos\frac{3}{2}\pi x = 0\,;$ $\frac{3}{2}\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;$ $3x = 1 + 2k\,;$

$x = \frac{1+2k}{3}$ $con\ k \in Z$ $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{3}$ $\wedge$ $x_2 = 1$

Nell'intervallo $\left[0\,;\,\frac{4}{3}\right]$*:*

$g'(x) > 0$: $\frac{3}{2}\pi \cdot cos\frac{3}{2}\pi x > 0\,;$ $cos\frac{3}{2}\pi x > 0\,;$ $0 < \frac{3}{2}\pi x < \frac{\pi}{2}$ $\vee$ $\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\pi x < 2\pi$

$0 < x < \frac{1}{3}$ $\vee$ $1 < x < \frac{4}{3}$



Pertanto i punti di massimo sono in $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$ *e i punti di minimo in* $x = 1 + \frac{4}{3}k$

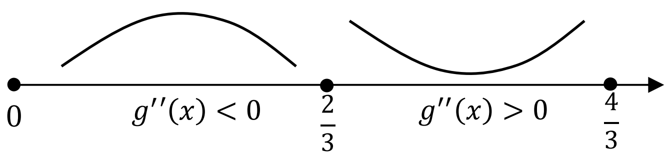
$g\left(\frac{1}{3}\right) = sin\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3} = sin\frac{\pi}{2} = 1$ *e* $g(1) = sin\frac{3}{2}\pi \cdot 1 = sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$g''(x) = -\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{3}{2}\pi \cdot sin\frac{3}{2}\pi x = -\frac{9}{4}\pi^2 \cdot sin\frac{3}{2}\pi x$

$g''(x) = 0$: $-sin\frac{3}{2}\pi x = 0\,;$ $\frac{3}{2}\pi x = k\pi\,;$ $x = \frac{2}{3}k$ $con\ k \in Z$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$ $\wedge$ $x_2 = \frac{2}{3}$ $\wedge$ $x_2 = \frac{4}{3}$

Nell'intervallo $\left[0\,;\,\frac{4}{3}\right]$*:*

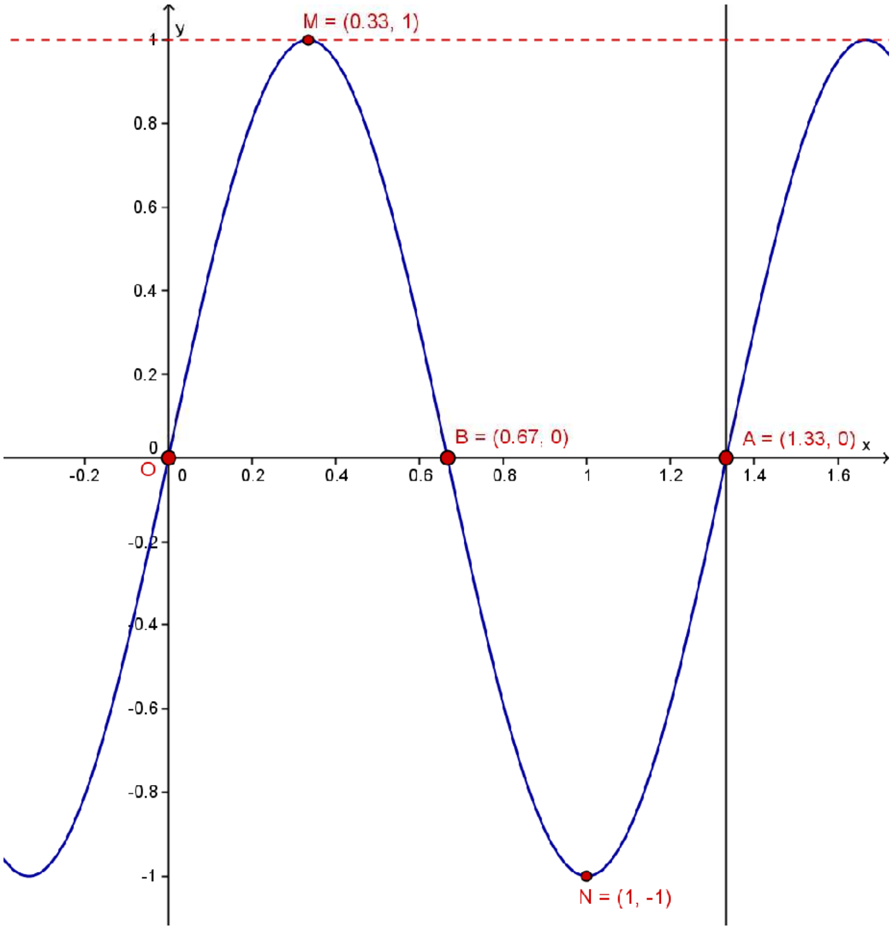
$g''(x) > 0$: $-\,sin\frac{3}{2}\pi x > 0\,;$ $sin\frac{3}{2}\pi x < 0\,;$ $\pi < \frac{3}{2}\pi x < 2\pi\,;$ $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$



Pertanto i punti di flesso sono in $x = \frac{2}{3}k$ *con* $k \in Z$.

$g\left(\frac{2}{3}\right) = sin\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{2}{3} = sin\,\pi = 0$

Il grafico è il seguente:



Punto 2

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left|27\left(\frac{1}{3}\right)^3\right|=1$$

$$f'(x)=|81x^2|$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\left|81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right|=\left|81\cdot\frac{1}{9}\right|=9$$

La retta tangente r ha equazione:

$$y-1=9\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right) \qquad \textit{cioè} \qquad y=9x-2$$

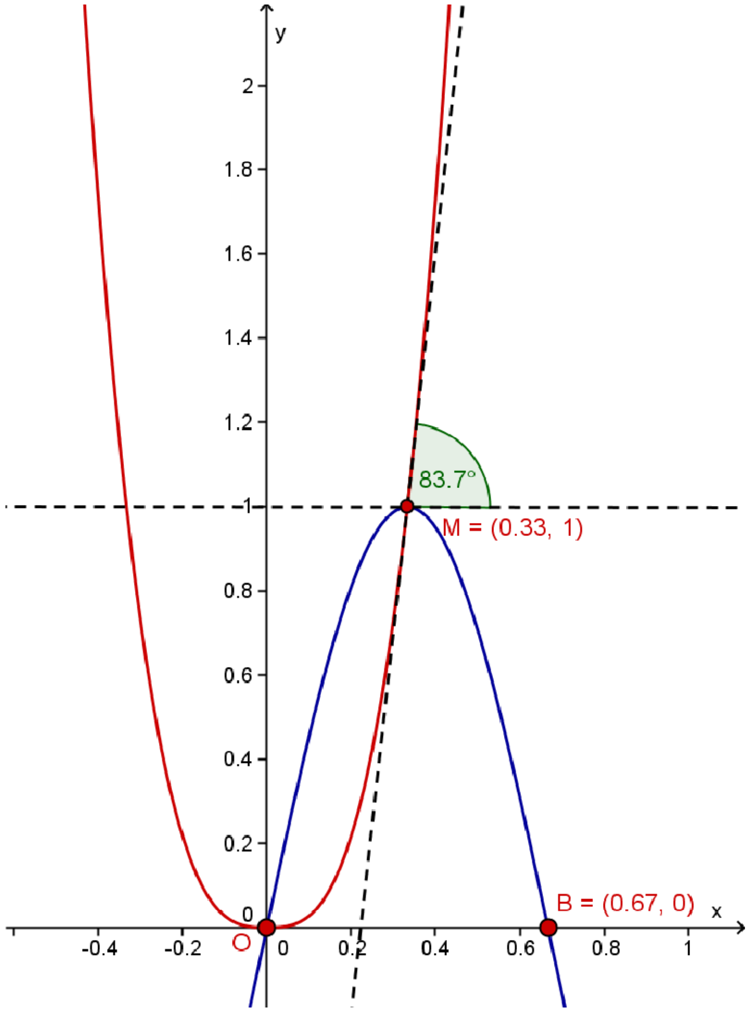
$$g\left(\frac{1}{3}\right)=sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$g'(x)=\frac{3}{2}\pi\cdot cos\frac{3}{2}\pi x$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi\cdot cos\frac{\pi}{2}=0$$

La retta tangente s ha equazione:

$$y-1=0\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right) \qquad \textit{cioè} \qquad y=1$$



Essendo la tangente s parallela all'asse delle x, la tangente dell'angolo acuto formato dalle due tangenti r e s è dato dal coefficiente angolare della tangente r :

$tan\,\alpha=9$; $\alpha=atan\,9\approx 83{,}66° \approx 83°(0{,}66\cdot 60)'\approx 83°\ 40'$.

Punto 3

L'area di R è:

$$R=\int_0^{\frac{1}{3}}[\,g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left[sin\frac{3}{2}\pi x-27x^3\right]dx=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3}{2}\pi x-\frac{27}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}}=$$

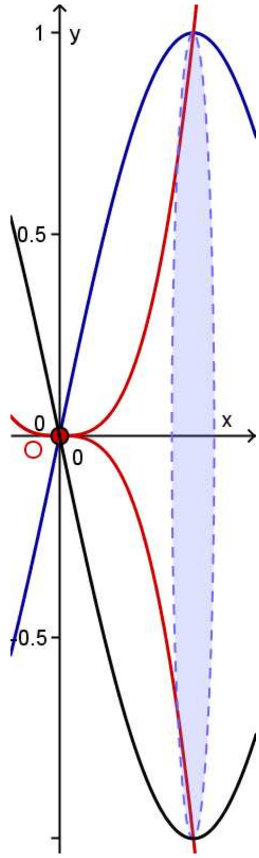
$$=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{81}-\left(-\frac{2}{3\pi}\cos 0-\frac{27}{4}\cdot 0\right)\right]=-\frac{1}{12}+\frac{2}{3\pi}=\frac{8-\pi}{12\pi}.$$

Punto 4

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x di una regione di piano delimitata dall'asse x, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di una funzione $f(x)$ è dato da:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

esso equivale alla somma degli infiniti cilindretti di raggio di base $f(x)$ e altezza dx .



Nel nostro caso:

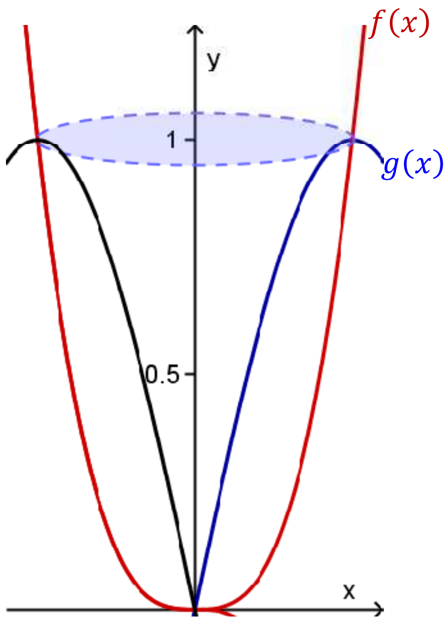
$$V_S = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} [\, g(x)]^2\, dx - \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} [f(x)]^2\, dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} \left[sin \frac{3}{2}\pi x \right]^2 dx - \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} [27x^3]^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} \left[sin^2 \frac{3}{2}\pi x - 729x^6 \right] dx$$

Soluzione 1

Il volume del solido T che si ottiene facendo ruotare la regione R attorno all'asse y si può determinare con il metodo dei "gusci cilindrici" di altezza $g(x) - f(x)$, raggio esterno $x + dx$ e raggio interno x , la cui formula è :

$V = 2\pi \int_a^b x \cdot [\, g(x) - f(x)]\, dx$



Nel nostro caso:

$$V_T = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{3}} x \cdot \left[sin \frac{3}{2}\pi x - 27x^3 \right] dx$$

Soluzione 2

Ricordiamo innanzitutto che:

la funzione inversa di $f(x) = 27x^3$ *è* $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$

la funzione inversa di $g(x) = sin\frac{3}{2}\pi x$ *è* $g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi} asin\, y$

Nella rotazione attorno all'asse y, la regione di piano R genera una specie di calice.

$$V_T = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2\, dx = \pi \cdot \int_0^1 \left[\frac{1}{3}\sqrt[3]{y} \right]^2 dy - \pi \cdot \int_0^1 \left[\frac{2}{3\pi} asin\, y \right]^2 dy$$