

Questionario

Quesito 1

La traccia del quesito è equivoca. Cosa si vuole intendere con la frase: il “mondo che ci circonda”?

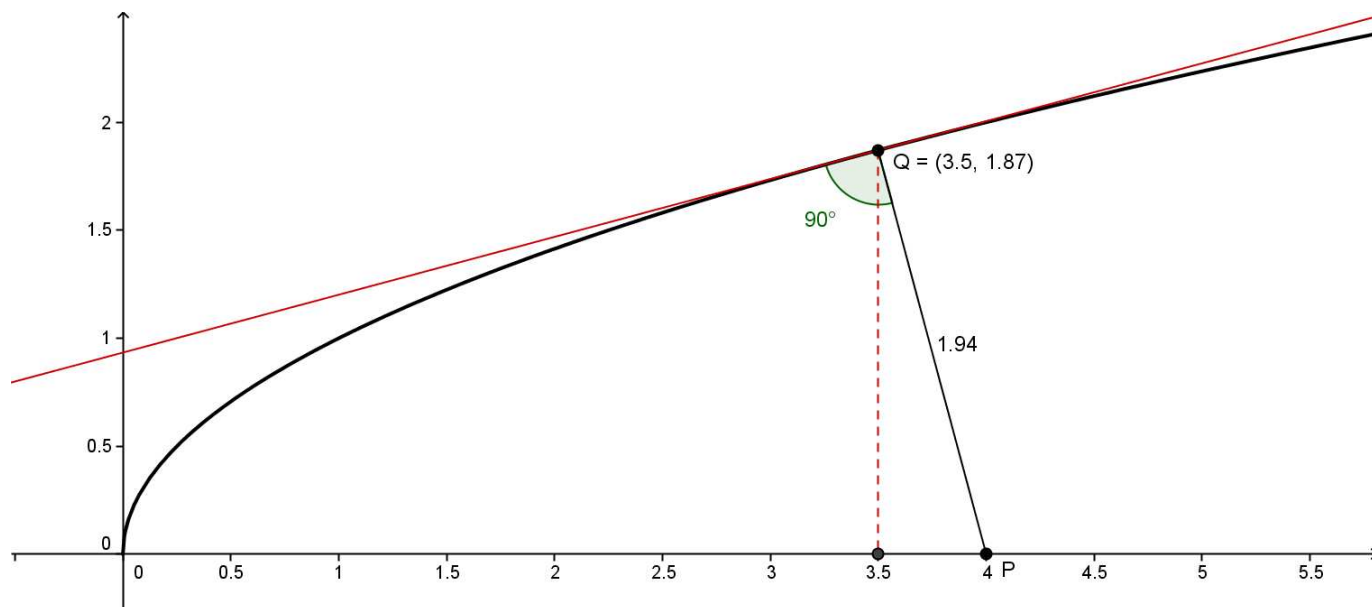
La geometria non euclidea non è una geometria intrinsecamente più corretta di quella euclidea.

Semplicemente la geometria euclidea fornisce uno strumento matematico adeguato per descrivere il mondo che ci circonda se ragioniamo in termini di piccole distanze, piccole rispetto alle dimensioni della Terra.

Se invece siamo interessati a studiare, ad esempio, problemi che coinvolgono distanze paragonabili alle dimensioni del pianeta o alle distanze interstellari, allora l'approssimazione euclidea non è adeguata, e occorre invece utilizzare modelli non euclidei come la geometria sferica o ellittica.

In conclusione: Silvia si è espressa male, o meglio chi ha preparato il quesito si è espresso in maniera ambigua.

Quesito 2



Sia $P(p; \sqrt{p})$ un punto generico della curva $y = \sqrt{x}$.

Occorre trovare la minima distanza fra il punto P e il punto $Q(4; 0)$

La distanza fra i due punti P e Q è data dalla funzione del parametro p :

$$d(p) = \sqrt{(p-4)^2 + (\sqrt{p}-0)^2} \quad \text{avente Dominio } D = \{p \in \mathbb{R} / p \geq 0\}$$

$$d(p) = \sqrt{p^2 + 16 - 8p + p}$$

$$d(p) = \sqrt{p^2 - 7p + 16}$$

$$d'(p) = \frac{2p-7}{2\sqrt{p^2-7p+16}}$$

$$f'(p) = 0 \quad \text{per } p = \frac{7}{2}$$

$$f'(p) > 0 \quad \text{per } p > \frac{7}{2}$$

$$f'(p) < 0 \quad \text{per } 0 < p < \frac{7}{2}$$

Pertanto la minima distanza si ottiene per $p = \frac{7}{2}$.

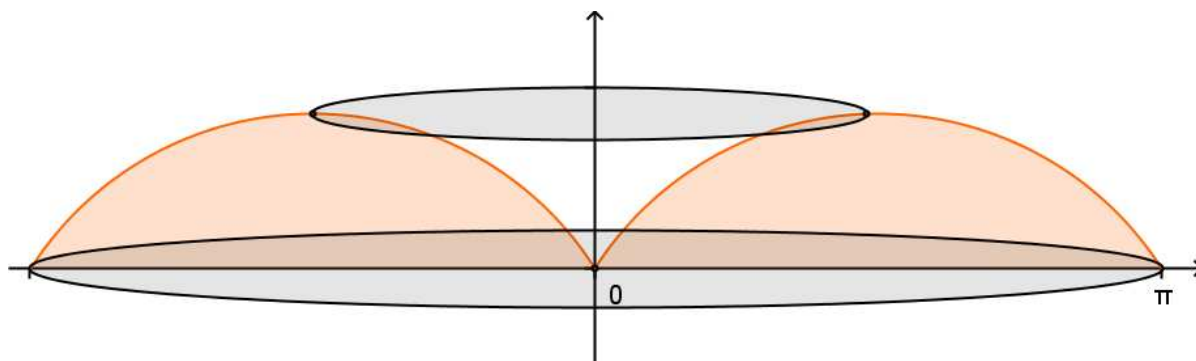
Il punto P richiesto ha coordinate: $P\left(\frac{7}{2}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

$$\text{mentre la distanza minima vale: } f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 16} = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} = \sqrt{\frac{15}{4}} \approx 1,94$$

Nota

In alternativa era possibile studiare la funzione quadrato della distanza : $d^2(p) = p^2 - 7p + 16$, che rappresenta una parabola con concavità positiva e con valore minimo nel vertice $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$.

Quesito 3



Applicando il II° Teorema di Guldino:

“Il volume di un solido generato dalla rotazione di una regione piana S attorno a una retta che appartiene al piano della figura, senza intersecarla, è uguale al prodotto dell’area della regione S per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro della regione S ”.

In simboli: $V = S \cdot C_{\text{Baricentro}}$.

Nel nostro caso:

Il baricentro G ha ascissa $x_G = \frac{\pi}{2}$ (mentre l’ordinata y_G non è indispensabile conoscere)

L’area della regione $S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (\cos 0) = 1 + 1 = 2$

Pertanto, il volume richiesto è: $V = S \cdot C_G = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2$.

Quesito 4

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti in gruppi di 4 sono:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Occorre risolvere l'equazione: $C_{n,4} = C_{n,3}$ con le condizioni di esistenza $n \in \{x \in \mathbb{N} / n > 4\}$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$$

$$\frac{n-3}{3! \cdot 4} = \frac{1}{3!}$$

$$\frac{n-3}{4} = 1$$

$$n-3=4$$

$$n=7$$

Valore accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza.

Quesito 5

L'insieme dei numeri naturali quadrati perfetti costituisce un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali. Da questa osservazione si sarebbe portati a concludere erroneamente che “i numeri naturali siano in numero maggiore dei numeri quadrati perfetti”.

Invece i due insiemi, pur essendo l'uno incluso propriamente nell'altro, hanno la stessa cardinalità. Infatti, come sotto dimostrato, esiste una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi:

$$\begin{aligned} f : N &\mapsto N_{QP} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

La funzione è iniettiva

$$\forall n_1, n_2 \in N \text{ con } n_1 \neq n_2 \quad \text{si ha che:} \quad f(n_1) = n_1^2 \neq f(n_2) = n_2^2$$

La funzione è suriettiva

$$\forall m \in N_{QP} \quad \text{allora} \quad \exists n \in N \quad \text{t. c.} \quad m = n^2$$

La funzione è pertanto, biunivoca.

Quesito 7

L'evento E = "almeno due risposte sono corrette"

è il complementare dell'evento: "una risposta non è corretta oppure zero risposte non sono corrette"

Essendo:

$$p(E) = \frac{1}{4}$$

$$p(1, n) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}}$$

$$p(0, n) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$p(E) = 1 - p(0, n) - p(1, n) = 1 - 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,75597 .$$

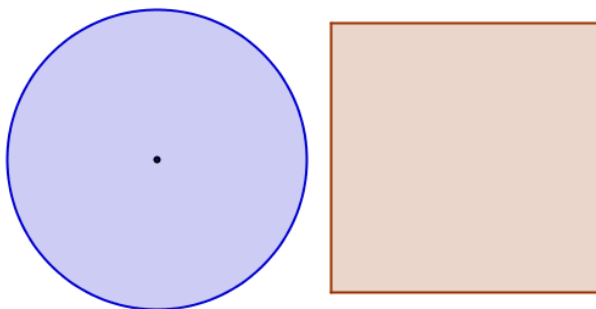
Quesito 8

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca.

Il problema risale alle origini della geometria, e ha tenuto occupati i matematici per secoli. Fu solo nel 1882 che l'impossibilità venne provata rigorosamente.

Il problema della quadratura del cerchio consiste nell'impossibilità di costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo della riga (senza tacche) e del compasso.

Trovare una soluzione richiederebbe la costruzione geometrica del numero $\sqrt{\pi}$.



Infatti essendo l'area del cerchio $S = \pi r^2$, il lato del quadrato ad esso equivalente è $l = r\sqrt{\pi}$.

L'impossibilità di una tale costruzione, con le limitazioni imposte dall'uso esclusivo di riga e compasso, deriva dal fatto che π è un numero trascendente (cioè non può essere ottenuto come soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi), e quindi non costruibile.

La trascendenza di π fu dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882.

Quesito 9

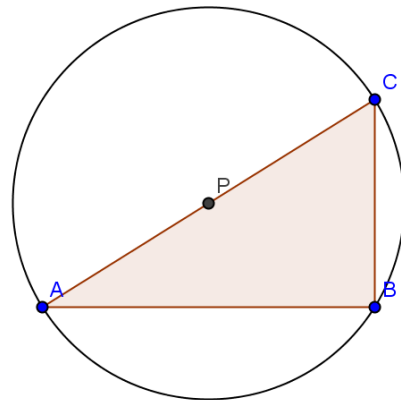
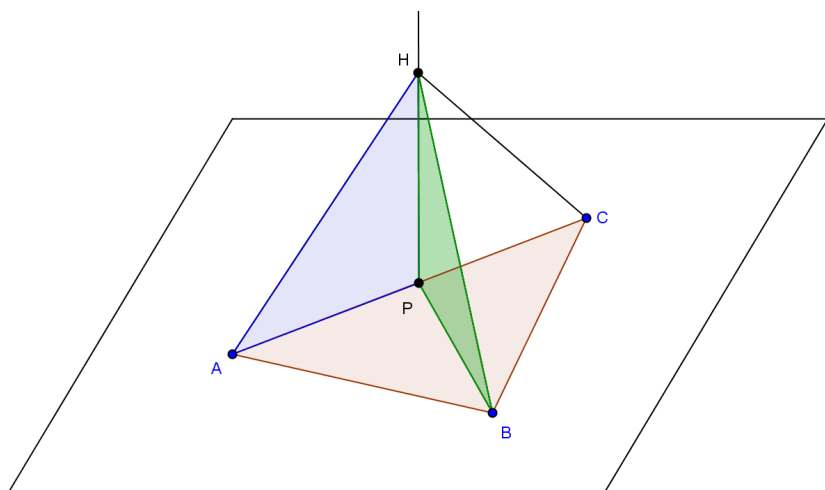
Per dimostrare che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici del triangolo occorre dimostrare che:

- A. ogni punto H di r è equidistante da A, B e C
- B. ogni punto H equidistante da A, B e C appartiene ad r

Dimostrazione Punto A

Essendo il triangolo rettangolo il punto P , punto medio di AC , coincide con il circocentro.

Consideriamo la retta r perpendicolare al foglio passante per il punto P e prendiamo un suo punto H .



Utilizzando il T. di Pitagora si ha:

$$\overline{HC}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PC}^2$$

$$\overline{HA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PA}^2$$

$$\overline{HB}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PB}^2$$

Ma essendo P il circocentro si ha: $\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$

Pertanto: $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$.

Dimostrazione Punto B

Sia H un punto dello spazio tale che: $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$. Congiungiamo il punto H con il punto medio P dell'ipotenusa AB e consideriamo i tre triangoli APH , BPH e CPH . Essi sono congruenti per il III criterio di congruenza. Infatti, essi hanno: $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$ per ipotesi, $\overline{PH}$ in comune, $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$ perché il punto P è il circocentro.

Pertanto $\widehat{HPA} = \widehat{HPC}$, ma essendo angoli supplementari, essi sono retti.

Allo stesso modo è retto anche l'angolo $\widehat{HPB}$.

Si conclude quindi, che la retta HP è perpendicolare in P al piano del triangolo ABC .

Quesito 10

L'alternativa corretta è la D. Infatti:

La funzione f :

ha un min relativo in $x = x_B$

un max relativo in $x = x_A$,

volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$
mentre volge la concavità verso il basso in $(-\infty, 0)$.

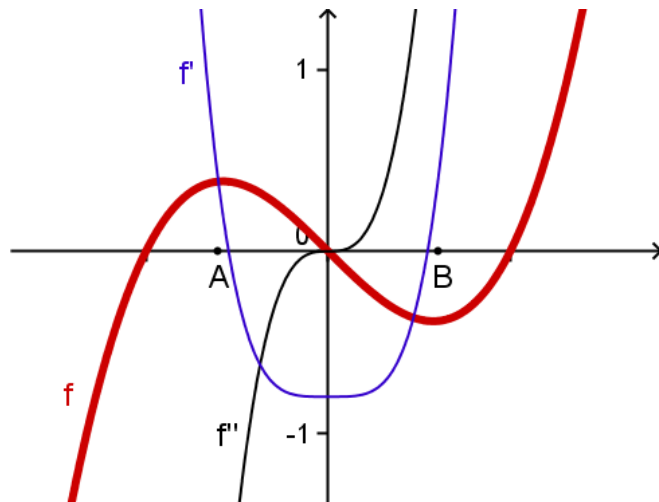
La funzione $f' = 0$ per $x = x_A$ e $x = x_B$

La funzione $f' > 0$ per $x < x_A$; $x > x_B$

La funzione $f' < 0$ per $x_A < x < x_B$

La funzione $f'' > 0$ per $x \in (0, +\infty)$

La funzione $f'' < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$.



Le altre alternative sono tutte errate:

Le alternative A e B non sono corrette, perché essendo la funzione f in $(0, +\infty)$ strettamente crescente e con la concavità positiva, le funzioni f' e f'' dovrebbero essere positive in tale intervallo, ma dal grafico ciò non risulta.

L'alternative C non è corretta, perché essendo la funzione f con la concavità positiva nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, la funzione f'' dovrebbe essere positiva in tale intervallo, ma dal grafico ciò non risulta.

L'alternative E non è corretta, perché la funzione f ha un minimo relativo nell'intervallo $(0, +\infty)$, mentre la funzione f' risulta sempre positiva in tale intervallo.