ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2011

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 2

Punto 1

Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 16x$

La funzione è una cubica, definita continua e derivabile in tutto R.

La funzione è dispari, cioè ha una simmetria rispetto all'origine, infatti:

$$f(-x) = -x^3 + 16x = -(x^3 - 16x) = -f(x)$$

La curva interseca l'asse x in:

$$x^3 - 16x = 0\,; \quad x \cdot (x^2 - 16) = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = +4 \end{matrix}$$

La funzione, essendo una funzione polinomiale, non ha asintoti.

$$\lim_{n\to+\infty}(x^3 - 16x) = \lim_{n\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{n\to-\infty}(x^3 - 16x) = \lim_{n\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$f^I(x) = 3x^2 - 16$$

$$f^I(x) = 0\,; \quad 3x^2 - 16 = 0\,; \quad x_{1,2} = \mp\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$f^I(x) > 0\,; \quad x < -\frac{4}{\sqrt{3}} \ \vee \ x > \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$f^I(x) < 0\,; \quad -\frac{4}{\sqrt{3}} < x < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

In $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ *c'è un Max relativo* $\quad f\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 + 16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{64}{3\sqrt{3}} + \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{-64+192}{3\sqrt{3}} = \frac{128}{9}\sqrt{3} \approx 24{,}63$

In $x = +\frac{4}{\sqrt{3}}$ *c'è un Min relativo* $\quad f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 - 16 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} - \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64-192}{3\sqrt{3}} = -\frac{128}{9}\sqrt{3} \approx -24{,}63$

Pertanto $M\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{128}{9}\sqrt{3}\right)$ *è un punto di massimo relativo*

mentre $N\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{128}{9}\sqrt{3}\right)$ *è un punto di minimo relativo.*

$$f^{II}(x) = 6x$$

$f^{II}(x) = 0\,;$ *per* $x = 0\,;$ $\qquad f^{II}(x) > 0\,;$ *per* $x > 0\,;$ $\qquad f^{II}(x) < 0\,;$ *per* $x < 0\,;$

La funzione volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(-\infty,\ 0)$.

La funzione volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$.

L'origine , centro di simmetria, è un punto di flesso.

Studiamo la funzione $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$

<u>Soluzione 1</u>

La funzione è una funzione continua e derivabile in tutto R.
La funzione è simmetrica rispetto all'origine e periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$

E' sufficiente studiarla nell'intervallo $[0, 4]$

Studiamo il segno della funzione: $f(x) \geq 0$

$y = sin\frac{\pi}{2}x \geq 0;\qquad 0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \pi$; *moltiplicando per* $\frac{2}{\pi}$ *si ha:*

$0 \cdot \frac{2}{\pi} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}x \leq \frac{2}{\pi}\pi$ *cioè:* $0 \leq x \leq 2$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}x \geq 0 \qquad cos\frac{\pi}{2}x \geq 0 \qquad 0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}x \leq 2\pi$$

$0 \leq x \leq 1$; $3 \leq x \leq 4$

Pertanto :

la funzione è crescente in $(0,\ 1) \cup (3,\ 4)$
la funzione è decrescente in $(1,\ 3)$
la funzione ha un massimo relativo in $x = 1$ *con ordinata 1*
la funzione ha un minimo relativo in $x = 3$ *con ordinata -1*

Flessi:

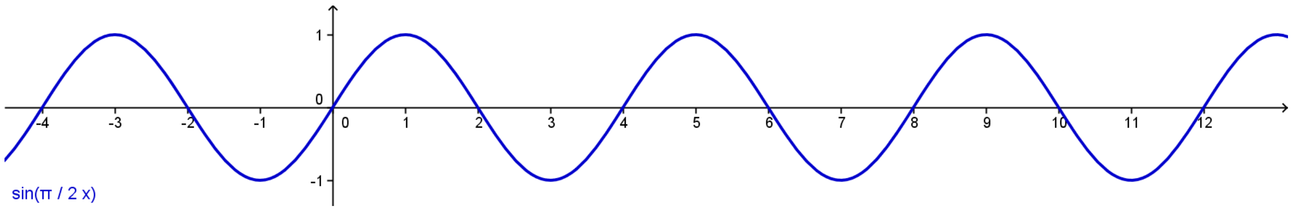
$$f''(x) = \frac{\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}x$$

$f''(x) = \frac{\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}x \geq 0 \qquad sin\frac{\pi}{2}x \geq 0 \qquad 0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \pi$; *moltiplicando per* $\frac{2}{\pi}$ *si ha:*

$$0 \cdot \frac{2}{\pi} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}x \leq \frac{2}{\pi}\pi \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Pertanto in $x = 0 \quad x = 2 \quad x = 4$ *ci sono punti di flesso*

Essendo la funzione periodica di periodo 4, il grafico si ripete ciclicamente nell'intero asse reale.



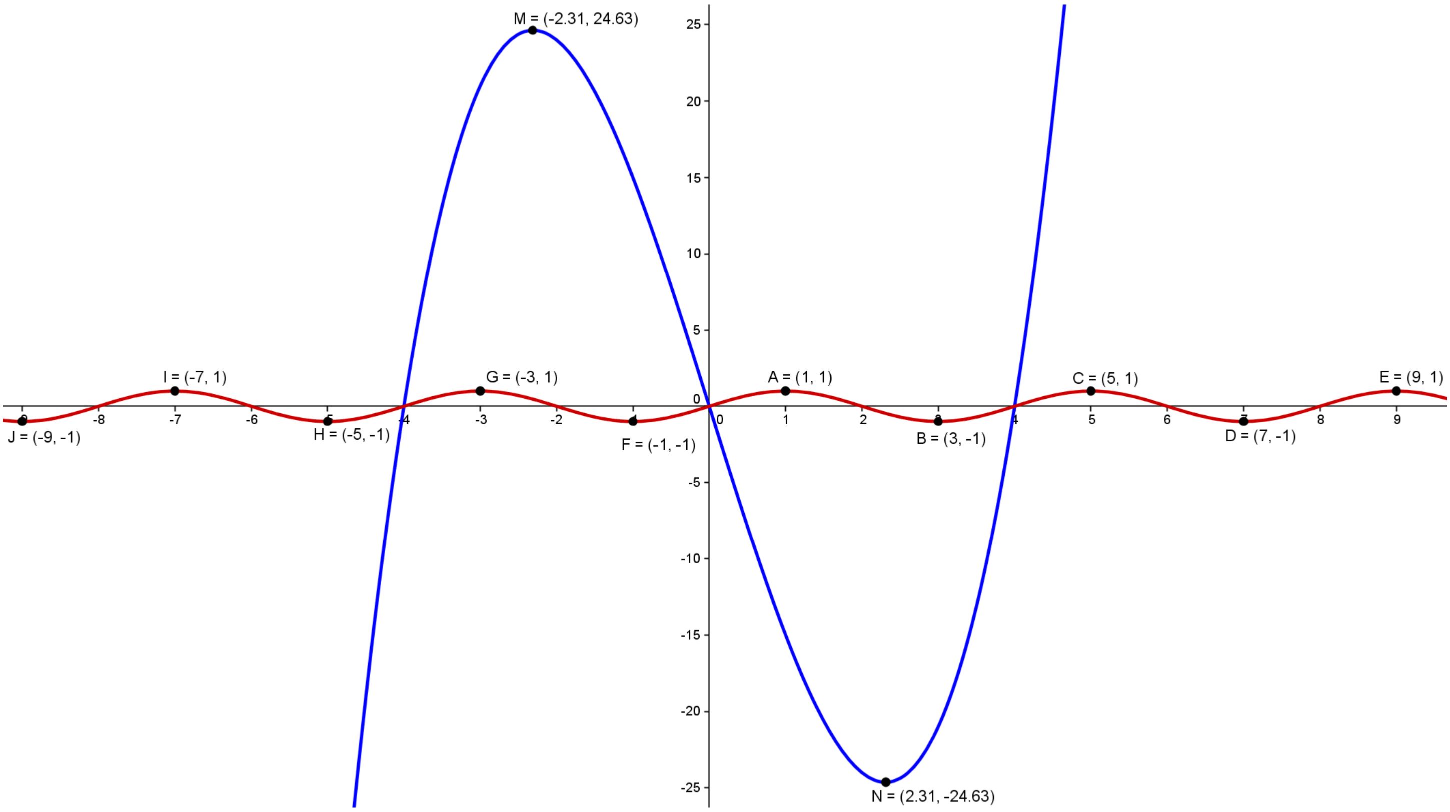
<u>Soluzione 2</u>

Il grafico della funzione si ottiene mediante una contrazione della funzione y = sen x che porta il punto $(2\pi;\ 0)$ *nel punto* $(4; 0)$.

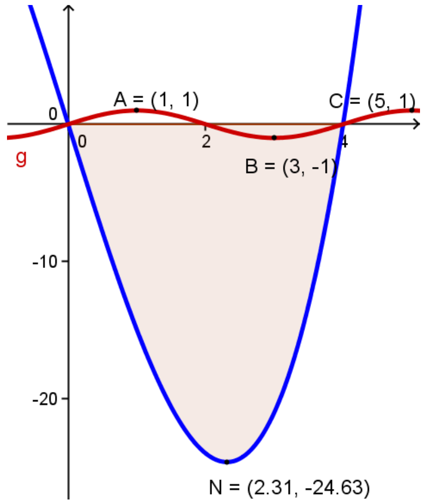
Le equazioni della contrazione sono: $\begin{cases} x^I = \frac{2}{\pi}x \\ y^I = y \end{cases}$

I punti richiesti dalla traccia sono i punti di max e min relativi:

$A(1; 1),\ B(3; -1),\ C(5; 1),\ D(7; -1),\ E(9; 1),\ F(-1; -1),\ G(-3; 1),\ H(-5; -1),\ I(-7; 1),\ J(-9; -1)$



Punto 2



L'area richiesta è:

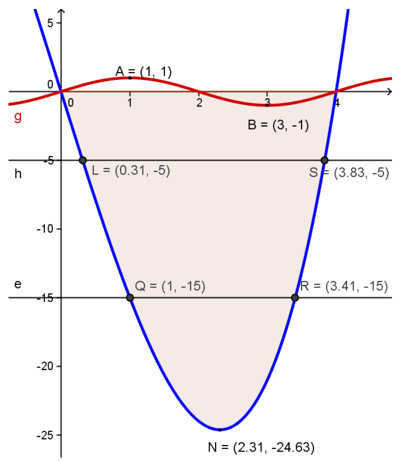
$$S = \int_0^4 \left[\sin\frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right]\, dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2\right]_0^4 =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot 1 - \frac{4^4}{4} + 8\cdot 4^2 - \left(-\frac{2}{\pi}\cdot 1 - 0 + 0\right) = -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{2}{\pi} = 64$$

Punto 3

Per trovare i punti di intersezione fra la funzione $g(x)$ *e la retta* $y = -5$ *si risolve il sistema:*

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5 = x^3 - 16x \\ - \end{cases} \qquad x^3 - 16x + 5 = 0$$



Studiamo la funzione: $h(x) = x^3 - 16x + 5$

Una soluzione si trova nell'intervallo $(0, 1)$.

$h(0) = 5 > 0$ $\qquad$ $h(1) = -12 < 0$

$h(0{,}5) = 0{,}125 - 8 + 5 < 0$

$h(0{,}1) = 0{,}001 - 1{,}6 + 5 > 0$

$h(0{,}2) = 0{,}008 - 3{,}2 + 5 > 0$

$h(0{,}3) = 0{,}027 - 4{,}8 + 5 > 0$

$h(0{,}4) = 0{,}064 - 6{,}4 + 5 < 0$

Pertanto $x_1 = 0{,}35 \mp 0{,}05$

L'altra soluzione si trova nell'intervallo $(3,4)$.

$h(3) = 27 - 48 + 5 < 0$ $\qquad$ $h(4) = 64 - 64 + 5 > 0$

$h(3{,}5) = 42{,}875 - 56 + 5 < 0$

$h(3{,}6) = 46{,}656 - 57{,}6 + 5 < 0$

$h(3{,}7) = 50{,}653 - 59{,}2 + 5 < 0$

$h(3{,}8) = 54{,}872 - 60{,}8 + 5 < 0$

$h(3{,}9) = 59{,}319 - 62{,}4 + 5 > 0$

Pertanto $x_2 = 3{,}85 \mp 0{,}05$

Per trovare i punti di intersezione fra la funzione $g(x)$ *e la retta* $y = -5$ *si risolve il sistema:*

$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -15 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} -15 = x^3 - 16x \\ - \end{cases}$ $\qquad$ $x^3 - 16x + 15 = 0$

Si osserva che $x = 1$ *è soluzione dell'equazione. Pertanto con Ruffini si ha:*

	1	*0*	*-16*	*15*
1		*1*	*1*	*-15*
	1	*1*	*-15*	*0*

$(x-1)(x^2 + x - 15) = 0$ $\qquad$ $x_1 = 1$ $\qquad$ $x_{2,3} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{61}}{2}$

$$Pertanto \quad x_3 = 1 \quad e \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \quad .$$

Punto 4

Il volume può essere calcolato utilizzando il "metodo del volume a fette".

Ciascuna fetta è una sezione del solido con un piano perpendicolare alla superficie della vasca e parallelo all'asse y.

Tale sezione ha area $S(x) = [\sin x - x^3 + 16x] \cdot (5 - x)$.

Applicando la formula del volume a fette:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Si ottiene:

$$V = \int_0^4 \left[\sin\frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right] \cdot (5 - x)\, dx$$

$$V = \int_0^4 \left[5\sin\frac{\pi}{2}x - 5x^3 + 80x - x\sin\frac{\pi}{2}x + x^4 - 16x^2\right] dx$$

Determiniamo dapprima l'integrale indefinito:

$\int \left[x \cdot \sin\frac{\pi}{2}x\right] dx$ $\qquad$ *Utilizzando il metodo di integrazione per parti*

$f(x) = x$ $\qquad$ $f^I(x) = 1$

$g^I(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x$ $\qquad$ $g(x) = -\dfrac{2}{\pi} \cdot \cos\dfrac{\pi}{2}x$

$$\int\left[x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x\right]dx=-\frac{2}{\pi}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\cdot\int\left[\cos\frac{\pi}{2}x\right]dx=-\frac{2}{\pi}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x=$$

$$=-\frac{2}{\pi}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{4}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x\ .$$

Ritornando all'integrale definito:

$$V=\int_0^4\left[5\sin\frac{\pi}{2}x-5x^3+80x-x\sin\frac{\pi}{2}x+x^4-16x^2\right]\,dx$$

$$=\left[-5\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x-5\cdot\frac{x^4}{4}+80\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2}{\pi}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{x^5}{5}-16\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^4=$$

$$=\left[-\frac{10}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{5}{4}x^4+40x^2+\frac{2}{\pi}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{x^5}{5}-\frac{16}{3}x^3\right]_0^4=$$

$$=\left[-\frac{10}{\pi}\cdot 1-\frac{5}{4}4^4+40\cdot 16+\frac{8}{\pi}\cdot 1-\frac{4}{\pi^2}\cdot 0+\frac{4^5}{5}-\frac{16}{3}4^3-\left(-\frac{10}{\pi}\cdot 1\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{10}{\pi}-5\cdot 4^3+640+\frac{8}{\pi}+\frac{4^5}{5}-\frac{4^5}{3}+\frac{10}{\pi}\right]=$$

$$=\left[-320+640+\frac{8}{\pi}+\frac{1024}{5}-\frac{1024}{3}\right]=$$

$$=\left[320+\frac{8}{\pi}+\frac{1024}{5}-\frac{1024}{3}\right]=$$

$$=\left[\frac{8}{\pi}+\frac{4800+3072-5120}{15}\right]=$$

$$=\left[\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}\right]\approx 186{,}0131457$$

Essendo le misure della vasca in metri, il volume è: $V\approx 186{,}013\ m^3=186013\ dm^3=186\ 013\ l$.