ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2011

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

Punto 1.1

Data la funzione $f(x) = x + ln\,4 + \frac{2}{e^x+1}$ *calcoliamo i limiti :*

Poiché:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0 \qquad si\ ha\ che:$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = +\infty$$

Punto 1.2

<u>*Soluzione 1*</u>

Determiniamo $f(x) + f(-x)$

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{e^{-x}+1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2\,e^x}{1+e^x}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2+2e^x}{e^x+1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + \frac{2\cdot(1+e^x)}{e^x+1} \qquad con\ \ e^x + 1 \neq 0$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + 2$$

Pertanto: $f(x) + f(-x) = 2\cdot(1+\ln 4)$ *che si può riscrivere come:* $f(x) = -f(-x) + 2\cdot(1+\ln 4)$

Ricordando che le equazioni della simmetria rispetto ad un punto $P_0\ (x_0\ ;\ y_0)$ *sono:*

$$\begin{cases} x^I = -x + 2 \cdot x_0 \\ y^I = -y + 2 \cdot y_0 \end{cases}$$

Le equazioni della simmetria rispetto al punto $A(0\ ;\ \ 1 + \ln 4)$ *sono:*

$$\begin{cases} x^I = -x \\ y^I = -y + 2(1 + \ln 4) \end{cases}$$

Sostituendo tali equazioni nella funzione: $y = x + ln\, 4 + \frac{2}{e^x + 1}$ *si ottiene:*

$$-y + 2(1 + \ln 4) = -x + ln\, 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1}$$

$$-y + 2 + 2\ln 4 = -x + ln\, 4 + \frac{2}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$-y + 2 + 2\ln 4 = -x + ln\, 4 + \frac{2}{\frac{1 + e^x}{e^x}}$$

$$-y = -2 - x - ln\, 4 + \frac{2\, e^x}{1 + e^x}$$

$$y = x + ln\, 4 + 2 - \frac{2\, e^x}{1 + e^x}$$

$$y = x + ln\, 4 + \frac{2 + 2\, e^x - 2\, e^x}{1 + e^x}$$

$$y = x + ln\, 4 + \frac{2}{1 + e^x}\ .$$

che è la funzione data: $f(x) = x + ln\, 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

Pertanto il punto il punto $A(0\ ;\ \ 1 + \ln 4)$ *è il centro di simmetria della funzione* $f(x)$.

<u>*Soluzione 2*</u>

Ricordando che il punto $P\ (x\ ;\ y)$ *corrisponde nella simmetria di centro* A *al punto* $P\,'\ (x';\ y')$
se A *è il punto medio del segmento* $PP\,'$, *cioè se:*

$$\frac{x + x'}{2} = x_A \qquad \frac{y + y'}{2} = y_A$$

Nel nostro caso, preso un generico punto $P(x\ ;\ f(x))$ *del grafico, anche il punto* $P'(-x\ ;\ f(-x))$ *appartiene alla curva* Γ *, e tale coppia di punti soddisfa le equazioni della simmetria di centro* $A(0\ ;\ \ 1 + ln\, 4)$*.*

Infatti:

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{x - x}{2} = 0 \qquad \frac{y + y'}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{2 \cdot (1 + ln\, 4)}{2} = 1 + ln\, 4$$

Punto 2.1

La funzione: $f(x) = x + ln\,4 + \frac{2}{e^x+1}$ *è definita, continua e strettamente crescente in tutto R.*

Infatti:

$$f^I(x) = 1 + \frac{-2\,e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2\,e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2\,e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

$f^I(x) > 0 \qquad \forall x \in R\,.$

Essendo inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = +\infty$$

la funzione $f(x)$ *incontra la retta* $f(x) = m$ *sempre e solo in un punto.*

Pertanto l'equazione $f(x) = m$ *ammette una e una sola soluzione reale.*

Punto 2.2

Avendo dimostrato precedentemente che:

$f(x) + f(-x) = 2 \cdot (1 + \ln 4)$ *sostituendo* $x = \alpha$ *si ha che:*

$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2 \cdot (1 + ln\,4);$ *sostituendo* $f(\alpha) = 3$ *si ha che:*

$3 \;+\; f(-\alpha) \;= 2 + 2\ln 4\,;$

$f(-\alpha) \;= -1 + 2\ln 4\,;$

Pertanto: $m \;= -1 + 2\,ln\,4\,;$

Punto 3.1

Occorre verificare che:

$$x + 2 + ln\,4 - \frac{2e^x}{e^x+1} \;=\; x + ln\,4 + \frac{2}{e^x+1} \qquad \forall x \in R$$

$$\cancel{x} + 2 + \cancel{ln}\,4 - \frac{2e^x}{e^x+1} \;=\; \cancel{x} + \cancel{ln}\,4 + \frac{2}{e^x+1}$$

$$2 - \frac{2e^x}{e^x+1} \;=\; \frac{2}{e^x+1}$$

$$\frac{2e^x - 2e^x + 2}{e^x+1} \;=\; \frac{2}{e^x+1}$$

$$\frac{2}{e^x+1} \;=\; \frac{2}{e^x+1} \qquad vera \quad \forall x \in R$$

Punto 3.2

Determiniamo l'asintoto obliquo a destra $y = mx + q$ *della curva* Γ *:*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{\frac{2}{e^x+1}}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{e^x+1}\cdot\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = \ln 4$$

Pertanto la retta $y = x + \ln 4$ *è un asintoto obliquo a destra della curva* Γ *.*

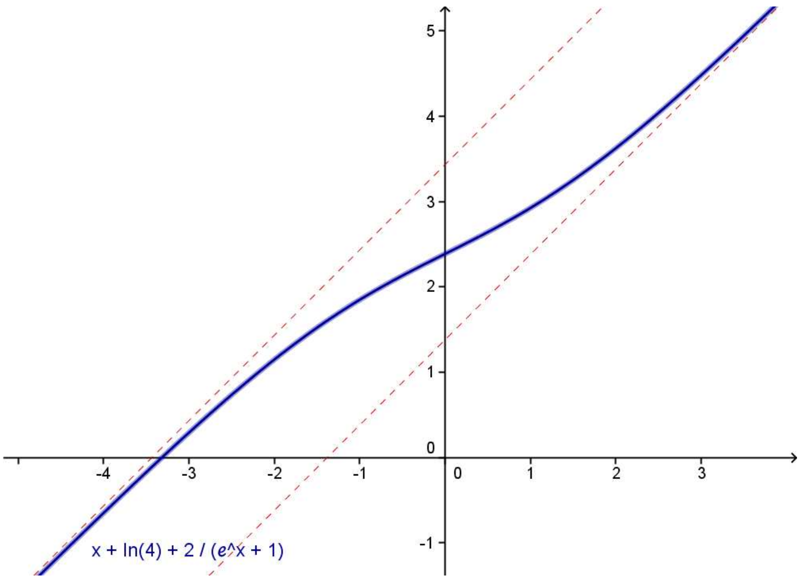
Determiniamo l'asintoto obliquo a sinistra $y = mx + q$ *della curva* Γ *:*

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{\frac{2}{e^x+1}}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{e^x+1}\cdot\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right] = 2 + \ln 4$$

Pertanto la retta $y = x + 2 + \ln 4$ *è un asintoto obliquo a sinistra della curva* Γ *.*

Punto 3.3



<u>*Soluzione 1*</u>

Per dimostrare che la curva Γ *è interamente compresa nella striscia piana delimitata dai due asintoti occorre provare che:*

$$x + \ln 4 < f(x) < x + 2 + \ln 4 \qquad \forall x \in R$$

Sostituendo l'espressione della funzione: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$ *si ottiene:*

$x + \ln 4 < x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$ $\qquad 0 < \frac{2}{e^x+1}$ $\qquad$ *verificata* $\forall x \in R$

Sostituendo l'altra espressione della funzione: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$ *si ottiene:*

$x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1} < x + 2 + \ln 4$ $\qquad -\frac{2e^x}{e^x+1} < 0$ $\qquad \frac{2e^x}{e^x+1} > 0$ $\qquad$ *verificata* $\forall x \in R$

Soluzione 2

Per dimostrare che la curva Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata dai due asintoti occorre provare che:

$$x + \ln 4 < f(x) < x + 2 + \ln 4 \qquad \forall x \in R$$

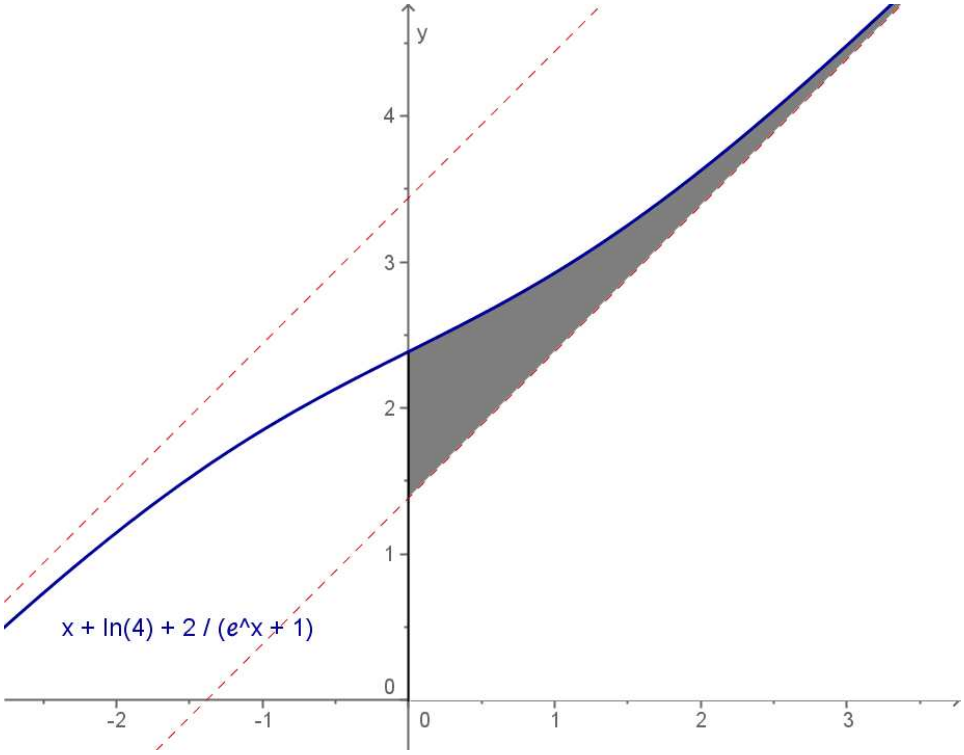
Sostituendo l'espressione della funzione: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$ *si ottiene:*

$$\cancel{x} + \cancel{\ln} 4 < \cancel{x} + \cancel{\ln} 4 + \frac{2}{e^x+1} < \cancel{x} + 2 + \cancel{\ln} 4 \qquad \textit{cioè:}$$

$$0 < \frac{2}{e^x+1} < 2 \qquad \textit{dividendo per } 2:$$

$$0 < \frac{1}{e^x+1} < 1 \qquad \textit{vera} \quad \forall x \in R \qquad \textit{poichè} \quad e^x + 1 > 1 \quad \forall x \in R$$

Punto 4.1



Soluzione 1

Calcoliamo l'integrale:

$$I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]\, dx = \int_0^\beta \left[x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x - \ln 4\right] dx = \int_0^\beta \frac{2}{e^x+1}\, dx =$$

Determiniamo dapprima l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} dx = \int \left[\frac{1+e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1}\right] dx = x - \ln|e^x+1| + c$$

Pertanto:

$$I(\beta) = 2\int_0^\beta \frac{1}{e^x+1}\, dx = 2 \cdot |x - \ln(e^x+1)|_0^\beta = 2 \cdot \left|\beta - \ln(e^\beta+1) - [0 - \ln(e^0+1)]\right| =$$

$$= 2 \cdot \left(\beta - \ln(e^\beta+1) + \ln 2\right) \; .$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{\beta\to+\infty} 2\cdot\left(\beta-\ln(e^\beta+1)+\ln 2\right)=\lim_{\beta\to+\infty} 2\cdot\left(\ln e^\beta-\ln(e^\beta+1)+\ln 2\right)=\lim_{\beta\to+\infty} 2\cdot\left(\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}+\ln 2\right)=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty} 2\cdot\left(\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}+\ln 2\right)=2\ln 2=\ln 4\ . \qquad Poich\grave{e}\quad \lim_{\beta\to+\infty}\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}=\ln 1=0\ .$$

Il valore trovato rappresenta l'area della regione di piano illimitata, delimitata dall'asse y, dal grafico della funzione $f(x)$ e dall'asintoto destro della funzione.

<u>*Soluzione 2*</u>

Calcoliamo l'integrale:

$$I(\beta)=\int_0^\beta [f(x)-x-\ln 4]\,dx=\int_0^\beta\left[x+ln\,4+\frac{2}{e^x+1}-x-\ln 4\right]dx=\int_0^\beta\frac{2}{e^x+1}\,dx=$$

Determiniamo dapprima l'integrale indefinito per sostituzione:

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\quad Poniamo\quad e^x=t>0\,;\qquad x=ln\,t\ ;\qquad dx=\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{1}{t\cdot(t-1)}dt=$$

Ma la funzione integranda si può scrivere come somma di due frazioni

$$\frac{1}{t\cdot(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t}=\frac{A\,t+B\,t+B}{t\cdot(t+1)}=\frac{(A+B)\,t+B}{t\cdot(t+1)}$$

Uuguagliando i coefficienti dei numeratori si ottiene:

$$\begin{cases}A+B=0\\B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A+1=0\\B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}\qquad \textit{Sostituendo:}$$

$$\int\frac{1}{t\cdot(t-1)}dt=\int\left[\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t}\right]dt=-\ln(t+1)+\ln t+c=\ln\frac{t}{t+1}+c$$

Risostituendo $e^x=t$ *si ricava:*

$$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+c$$

Pertanto:

$$I(\beta)=2\int_0^\beta\frac{1}{e^x+1}\,dx=2\cdot\left|\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right|_0^\beta=2\cdot\left[\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}-\ln\frac{e^0}{e^0+1}\right]=2\cdot\left[\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}-\ln\frac{1}{2}\right]$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{\beta\to+\infty} 2\cdot\left[ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}-\ln\frac{1}{2}\right]=-2\,ln\frac{1}{2}=ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=ln\,4\qquad Poich\grave{e}\quad\lim_{\beta\to+\infty}\ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1}=\ln 1=0\,.$$