ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

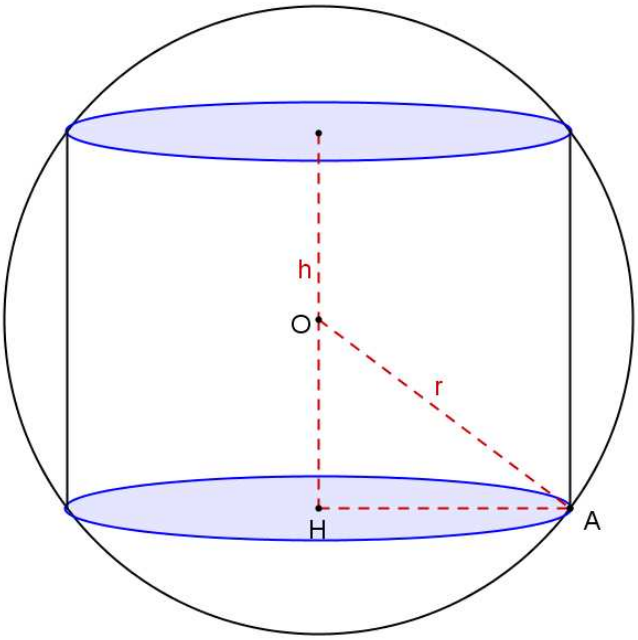
Sessione Ordinaria 2011

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 1

Poniamo $\overline{OH} = x$ *con i limiti geometrici* $0 < x < 2r$



$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$

Il volume del cilindro è dato da: $V = \pi\, \overline{AH}^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 2x \cdot (r^2 - x^2)$

$V = 2\pi \cdot (r^2\, x - x^3)$

La derivata prima è:

$V^I = 2\pi \cdot (r^2 - 3x^2)$

$V^I = 0;\quad 2\pi \cdot (r^2 - 3x^2) = 0;\quad x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{r^2}{3}}$

$V^I > 0;\quad 0 < x < \sqrt{\frac{r^2}{3}}$

$V^I < 0;\quad \sqrt{\frac{r^2}{3}} < x < 2r$

Pertanto il massimo volume si ha per $x = \sqrt{\frac{r^2}{3}}$ *e sostituendo il valore* $r = 6\ dm$ *si ottiene che:*

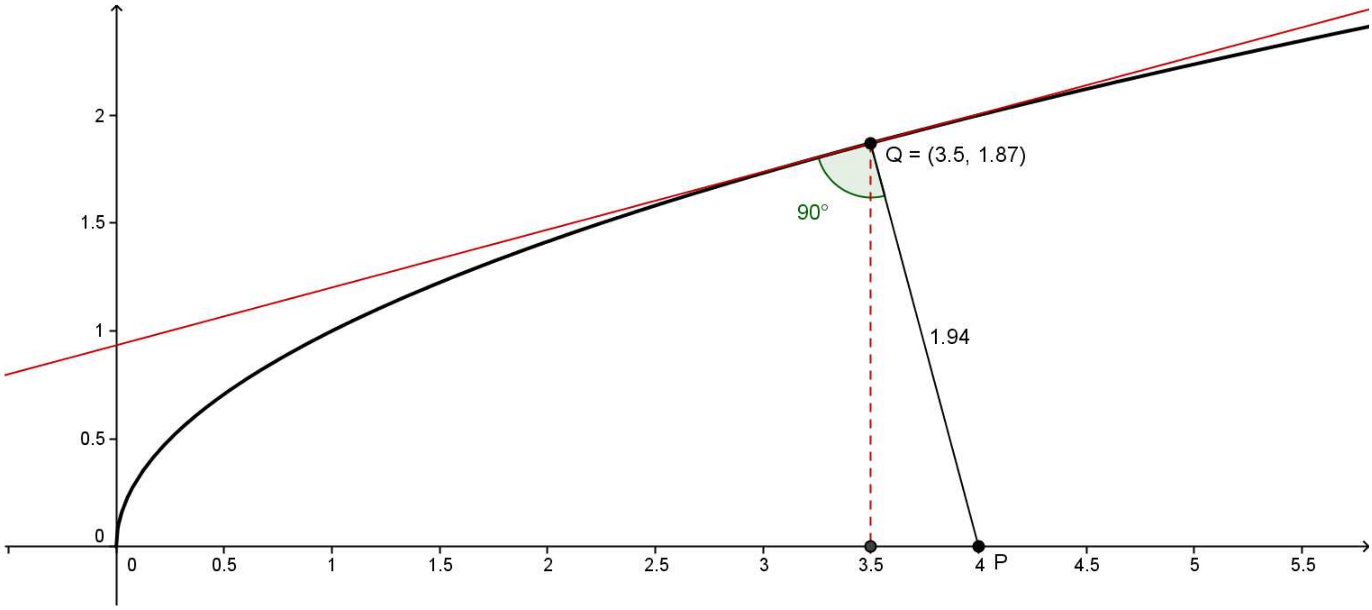
il massimo volume si ha per $x = \sqrt{\frac{6^2}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ dm.$

In definitiva il cilindro di volume massimo ha raggio $r = \overline{AH} = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ dm$

ed altezza $h = 2x = 4\sqrt{3}\ dm$ *.*

Il volume del cilindro massimo è: $V = \pi \cdot 24 \cdot 4\sqrt{3}\ dm^3 = \pi \cdot 24 \cdot 4\sqrt{3}\ dm^3 = 522{,}37\ litri$

Quesito 2



Sia P $\left(p; \sqrt{p}\right)$ *un punto generico della curva* $y = \sqrt{x}$.

Occorre trovare la minima distanza fra il punto P e il punto $Q(4; 0)$

La distanza fra i due punti P e Q è data dalla funzione del parametro p:

$$d(p) = \sqrt{(p-4)^2 + \left(\sqrt{p} - 0\right)^2} \qquad avente\ \ Dominio\ \ \ D = \{p \in R /\ p \geq 0\}$$

$$d(p) = \sqrt{p^2 + 16 - 8p + p}$$

$$d(p) = \sqrt{p^2 - 7p + 16}$$

$$d'(p) = \frac{2p - 7}{2\sqrt{p^2 - 7p + 16}}$$

$$f'(p) = 0 \qquad per \quad p = \frac{7}{2}$$

$$f'(p) > 0 \qquad per \quad p > \frac{7}{2}$$

$$f'(p) < 0 \qquad per \quad 0 < p < \frac{7}{2}$$

Pertanto la minima distanza si ottiene per $p = \frac{7}{2}$.

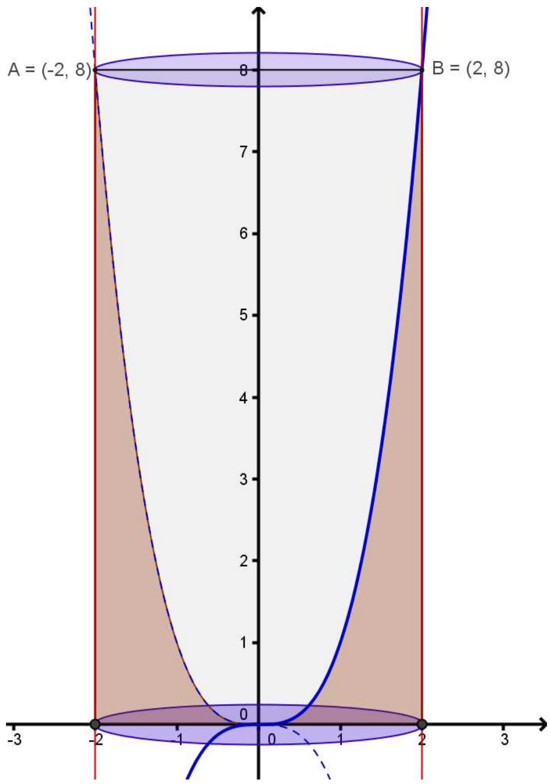
Il punto P richiesto ha coordinate: P $\left(\frac{7}{2}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

mentre la distanza minima vale: $f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 16} = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} = \sqrt{\frac{15}{4}} \approx 1{,}94$

Nota

In alternativa era possibile studiare la funzione quadrato della distanza : $d^2(p) = p^2 - 7p + 16$ *, che rappresenta una parabola con concavità positiva e con valore minimo nel vertice* $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$.

Quesito 3



La funzione $y = x^3$ *interseca la retta* $x = 2$ *nel punto* $B\ (2; 8)$

La funzione $y = x^3$ *interseca la retta* $x = -2$ *nel punto* $A\ (-2; 8)$

La funzione $y = x^3$ *è biunivoca in tutto l'insieme dei numeri Reali, pertanto è invertibile. La sua funzione inversa è* $x = \sqrt[3]{y}$

Il volume del solido di rotazione è dato dalla differenza fra il volume del cilindro avente raggio 2 e altezza 8 e il solido ottenuto dalla rotazione del ramo di curva $x = \sqrt[3]{y}$ *attorno all'asse y.*

Il volume del cilindro è: $V_1 = \pi\, r^2 \cdot h = \pi\, 2^2 \cdot 8 = 32\pi$.

Il volume del solido di rotazione è:

$$V_2 = \pi \int_0^2 f(y)^2\, dy = \pi \int_0^2 \sqrt[3]{y^2}\, dy = \pi \cdot \frac{3}{5}\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{5} \cdot \pi \cdot 8^{\frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \pi \cdot (2^3)^{\frac{5}{3}} = \frac{96}{5}\, \pi .$$

In definitiva il volume richiesto è:

$$V = V_1 - V_2 = 32\pi - \frac{96}{5}\, \pi = \frac{64}{5}\, \pi \approx 40{,}21 .$$

Quesito 4

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti in gruppi di 4 sono:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Occorre risolvere l'equazione: $C_{n,4} = C_{n,3}$ *con le condizioni di esistenza* $n \in \{x \in N \ / \ n > 4\}$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}$$

$$\frac{n-3}{3! \cdot 4} = \frac{1}{3!}$$

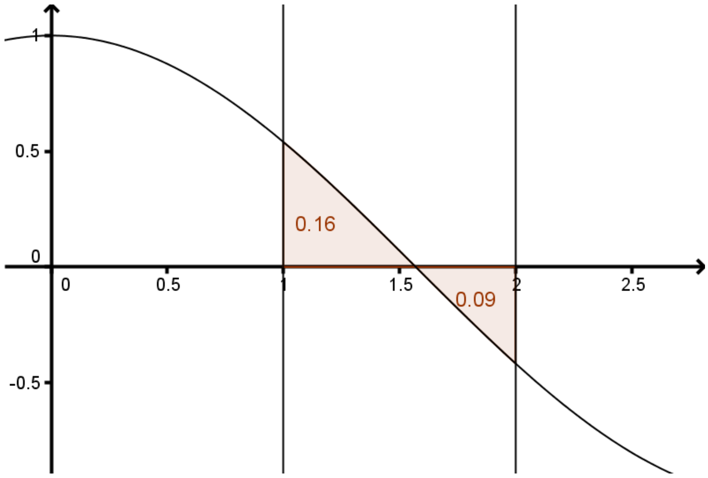
$$\frac{n-3}{4} = 1$$

$$n-3 = 4$$

$$n = 7$$

Valore accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza.

Quesito 5



L'area richiesta è data da:

$$S = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x \, dx = [\sin x\,]_1^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x\,]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 1 - \left(\sin 2 - \sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 1 - \sin 1 - \sin 2 + 1 = 2 - \sin 1 - \sin 2 \quad \approx \quad 0{,}25\ .$$

Quesito 6

Soluzione 1

$$\lim_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}=\frac{0}{0}$$

Per eliminare la forma di indeterminazione si pone $x-a=t \quad\Rightarrow\quad x=t+a \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0}\frac{tg(t+a)-tga}{t}$

Se $x\to a \quad\Rightarrow\quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{tg(t+a)-tga}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{tg\,t+tg\,a}{1-tg\,t\cdot tg\,a}-tga}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{tg\,t+tg\,a-tga+tg\,t\cdot tg^2\,a}{1-tg\,t\cdot tg\,a}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{tg\,t+tg\,t\cdot tg^2\,a}{1-tg\,t\cdot tg\,a}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{tg\,t\cdot\left(1+tg^2\,a\right)}{1-tg\,t\cdot tg\,a}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tg\,t\cdot\left(1+tg^2\,a\right)}{t\cdot(1-tg\,t\cdot tg\,a)}=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{tg\,t}{t}}_{0}\cdot\frac{\left(1+tg^2\,a\right)}{(1-\underbrace{\boxed{tg\,t\cdot tg\,a}}_{0})}=1+tg^2\,a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

Con $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, *altrimenti il limite perde di significato.*

Soluzione 2

$$\lim_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}$$

si pone $x-a=t \quad\Rightarrow\quad x=t+a \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0}\frac{tg(t+a)-tga}{t} \qquad Se\ \ x\to a \quad\Rightarrow\quad t\to 0$

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione tangente in $x=a$, *cioè della derivata prima della funzione* $f(x)=tg\,x$ *in* $x=a$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{tg(a+h)-tga}{t}=f^{I}(a)=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad .$$

Soluzione 3

Applicando la regola di De L'Hopital $\lim_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-0}{1-0}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 a}$

Soluzione 4

$$\lim_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x-\sin a}{\cos x\cdot\cos a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos a}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}$$

Quesito 7

$f(x) = x^{2011} + 2011\,x + 12$

La funzione f(x) è continua e derivabile in R

Inoltre:

$f(-1) = -2000 < 0$

$f(0) = 12 > 0$

Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto c $\epsilon\ (-1, 0)$ *in cui la funzione* $f(x) = 0$.

Calcoliamo la derivata prima:

$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011$

$f'(x) > 0 \qquad 2011x^{2010} + 2011 > 0 \qquad \forall x \in R$

Poiché la derivata prima è sempre positiva, la funzione è strettamente crescente in $(-1, 0)$.

Si conclude che esiste un unico punto c $\epsilon\ (-1, 0)$ *in cui* $f(x) = 0$.

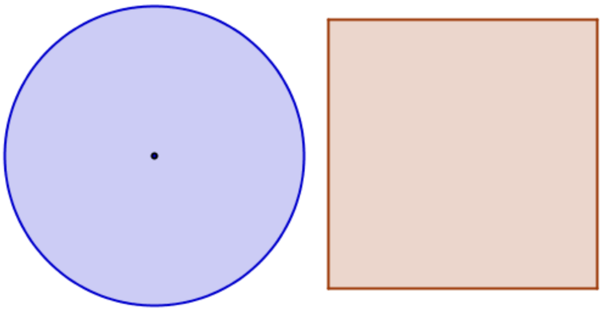
Quesito 8

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, costituisce un problema classico della geometria greca.

Il problema risale alle origini della geometria, e ha tenuto occupati i matematici per secoli. Fu solo nel 1882 che l'impossibilità venne provata rigorosamente.

Il problema della quadratura del cerchio consiste nell'impossibilità di costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo della riga (senza tacche) e del compasso.

Trovare una soluzione richiederebbe la costruzione geometria del numero $\sqrt{\pi}$.



Infatti essendo l'area del cerchio $S = \pi r^2$, *il lato del quadrato ad esso equivalente è* $l = r\sqrt{\pi}$.

L'impossibilità di una tale costruzione, con le limitazioni imposte dall'uso esclusivo di riga e compasso, deriva dal fatto che π *è un numero trascendente (cioè non può essere ottenuto come soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi), e quindi non costruibile.*

La trascendenza di π *fu dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882.*

Quesito 9

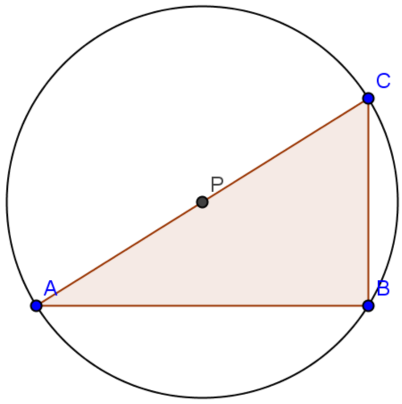
Per dimostrare che la retta r è il luogo geometrico dei punti equidistanti da i tre vertici del triangolo occorre dimostrare che:

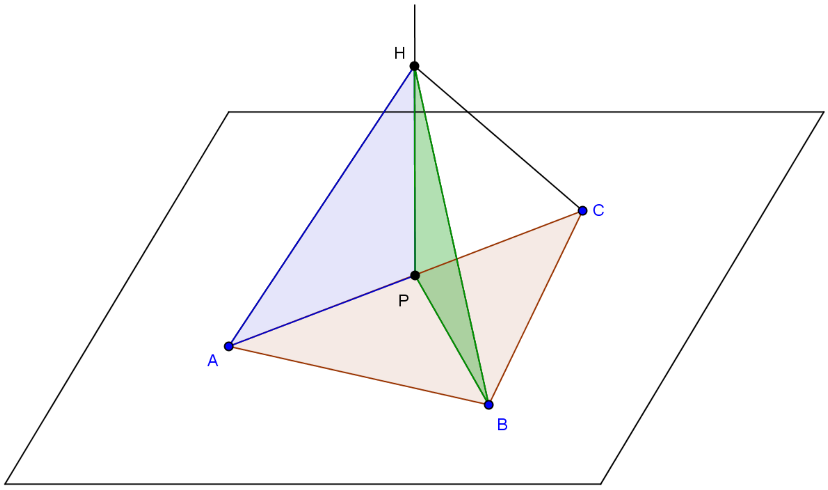
A. *ogni punto H di r è equidistante da A,B e C*
B. *ogni punto H equidistante da A,B e C appartiene ad r*

Dimostrazione Punto A

Essendo il triangolo rettangolo il punto P, punto medio di AC, coincide con il circocentro.

Consideriamo la retta r perpendicolare al foglio passante per il punto P e prendiamo un suo punto H.





Utilizzando il T. di Pitagora si ha:

$\overline{HC}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PC}^2$

$\overline{HA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PA}^2$

$\overline{HB}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PB}^2$

Ma essendo P il circocentro si ha: $\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$

Pertanto: $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$.

Dimostrazione Punto B

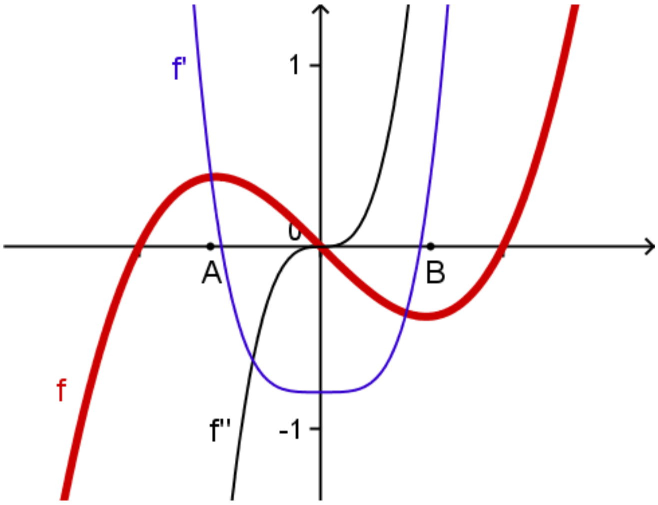
Sia H un punto dello spazio tale che: $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$ *. Congiungiamo il punto H con il punto medio P dell'ipotenusa AB e consideriamo i tre triangoli* APH, BPH *e* CPH *. Essi sono congruenti per il III criterio di congruenza. Infatti, essi hanno :* $\overline{HA} = \overline{HB} = \overline{HC}$ *per ipotesi,* $\overline{PH}$ *in comune ,* $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$ *perché il punto P è il circocentro.*

Pertanto $H\hat{P}A = H\hat{P}C$ *, ma essendo angoli supplementari, essi sono retti.*

Allo stesso modo è retto anche l'angolo $H\hat{P}B$.

Si conclude quindi, che la retta HP è perpendicolare in P al piano del triangolo ABC .

Quesito 10



L'alternativa corretta è la D. Infatti:

La funzione f *:*

ha un min relativo in $x = x_B$

un max relativo in $x = x_A$ *,*

volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, +\infty)$ *mentre volge la concavità verso il basso in* $(-\infty,\ 0)$*.*

La funzione $f' = 0$ *per* $x = x_A$ *e* $x = x_B$

La funzione $f' > 0$ *per* $x < x_A\ ;\ x > x_B$

La funzione $f' < 0$ *per* $x_A < x < x_B$

La funzione $f'' > 0$ *per* $x \in (0, +\infty)$

La funzione $f'' < 0$ *per* $x \in (-\infty,\ 0)$*.*

Le altre alternative sono tutte errate:

Le alternative A e B non sono corrette, perché essendo la funzione f *in* $(0, +\infty)$ *strettamente crescente e con la concavità positiva, le funzioni* f' *e* f'' *dovrebbero essere positive in tale intervallo, ma dal grafico ciò non risulta.*

L'alternative C non è corretta, perché essendo la funzione f *con la concavità positiva nell'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *, la funzione* f'' *dovrebbe essere positiva in tale intervallo, ma dal grafico ciò non risulta.*

L'alternative E non è corretta, perché la funzione f *ha un minimo relativo nell'intervallo* $(0, +\infty)$ *, mentre la funzione* f' *risulta sempre positiva in tale intervallo.*