ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2010

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 1

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$ dove a_n è il coefficiente di a^n.

Soluzione

Dato il polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$ *si ha che:*

$p^{(1)}(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + a_1$

$p^{(2)}(x) = n \cdot (n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)\cdot(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + (n-2)\cdot(n-3)a_{n-2}x^{n-4} + ... + a_2$

$p^{(3)}(x) = n \cdot (n-1)\cdot(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + (n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)a_{n-2}x^{n-5} + ... + a_3$

$\dots$

$\dots$

$p^{(n)}(x) = [n \cdot (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1]\cdot a_n x^{n-n} = [n \cdot (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1]\cdot a_n = n!\cdot a_n$.

Quesito 2

Siano $\overset{\Delta}{ABC}$ *un triangolo rettangolo in* A, r *la retta perpendicolare in* B *al piano del triangolo e* P *un punto di* r *distinto da* B. *Si dimostri che i tre triangoli* $\overset{\Delta}{PAB}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ *e* $\overset{\Delta}{PAC}$ *sono triangoli rettangoli.*

Soluzione 1

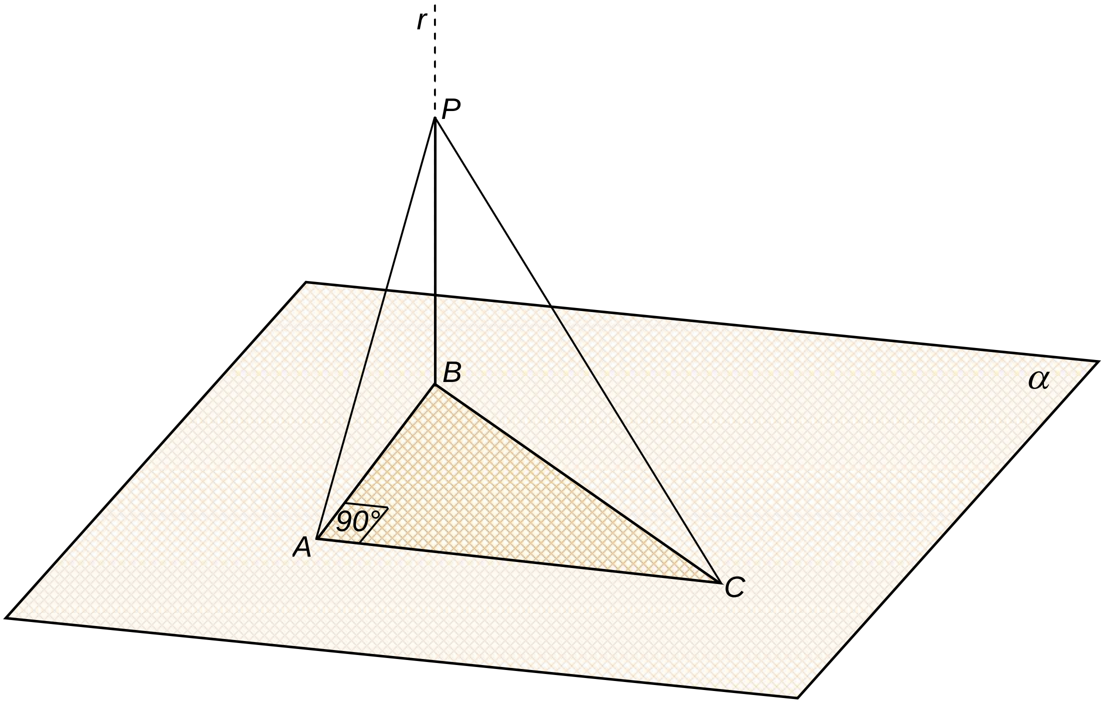
Essendo PB perpendicolare al piano di ABC, PB è perpendicolare a qualsiasi retta passante per B appartenente al piano, quindi PB è perpendicolare ad AB e a CB, ciò vuol dire che i triangoli $\overset{\Delta}{PAB}$ *e* $\overset{\Delta}{PBC}$ *sono triangoli rettangoli in B.*

Applicando il Teorema delle tre perpendicolari:

"Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una qualunque retta dello stesso piano, quest'ultima retta è perpendicolare al piano delle prime due",

si dimostra che il triangolo $\overset{\Delta}{PAC}$ *è retto in* A.

Infatti, la retta BA, condotta dal piede B della perpendicolare r al piano α, *è perpendicolare alla retta AC del piano. Pertanto, per il teorema sopraindicato, tale retta AC risulta perpendicolare al piano individuato dalla retta BA e della retta PB. Ciò implica che il triangolo* $\overset{\Delta}{PAC}$ *è rettangolo in A.*



Soluzione 2

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{PAB}$ *si ha:* $\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2$

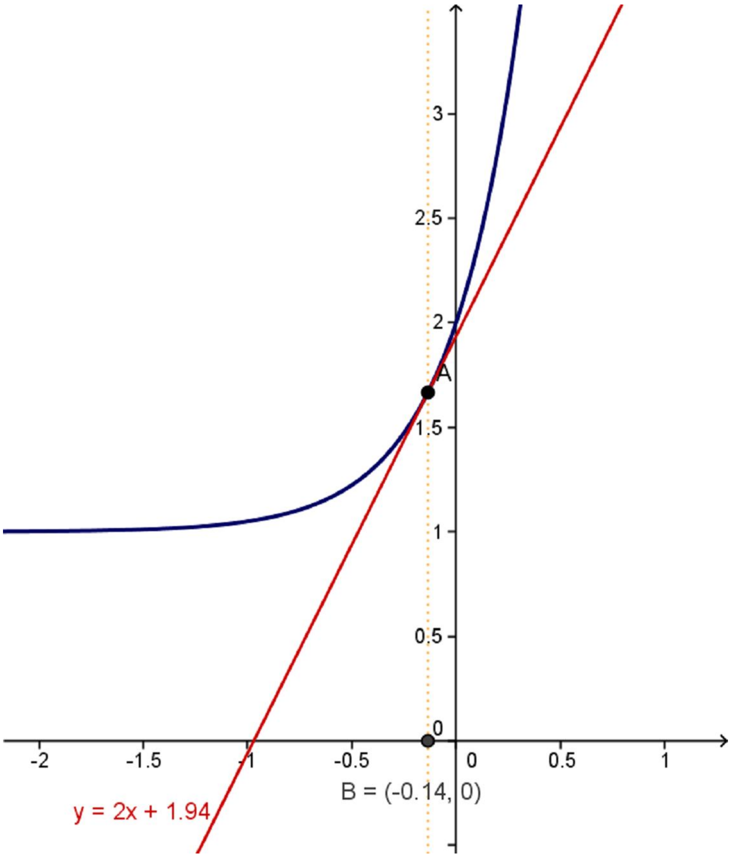
Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{PBC}$ *si ha:* $\overline{PC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2$

$$\overline{PC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{BC}^2 + \left(\overline{PA}^2 - \overline{AB}^2\right) = \left(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2\right) + \overline{PA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{PA}^2 .$$

Pertanto avendo dimostrato che: $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{PA}^2 \Rightarrow$ *che il triangolo* $\overset{\Delta}{PAC}$ *è rettangolo in A.*

Quesito 3

Sia γ il grafico di $f(x)=e^{3x}+1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x;\ f(x))$ ha pendenza uguale a 2?



Soluzione

La pendenza della retta tangente in x è data dalla derivata della funzione $f(x)$ nel punto x.

La derivata prima vale: $f^{I}(x)=3e^{3x}$.

Imponendo che: $f^{I}(x)=2$ *si ha:*

$$3e^{3x}=2\ ; \qquad e^{3x}=\frac{2}{3}\ ; \qquad 3x=\ln\frac{2}{3}\ ;$$

$$x=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}=\frac{\ln 2-\ln 3}{3}\approx -0{,}14\ .$$

Quesito 4

Si calcoli: $\lim_{x\to\infty} 4x \cdot sen\frac{1}{x}$

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty} 4x \cdot sen\frac{1}{x} = (\infty \cdot 0 = ?)$$ *Forma indeterminata*

$$\lim_{x\to\infty} 4x \cdot sen\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} 4 \cdot \frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$ *Ponendo* $\frac{1}{x} = t$ *si ha che: se* $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$.

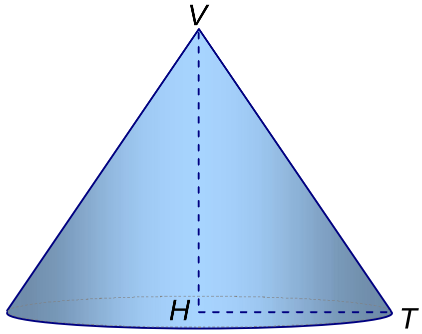
Sostituendo si ottiene:

$$= \lim_{x\to\infty} 4 \cdot \frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = = \lim_{t\to 0} 4 \cdot \frac{sent}{t} = 4 \cdot 1 = 4 \ .$$

Quesito 5

Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

Soluzione



Conviene trasformare l'apotema del cono $\overline{VT} = 80\ cm = 8\ dm$

Ponendo l'altezza del cono $\overline{VH} = x$, *si ha che il raggio di base è :*

$$\overline{TH} = \sqrt{8^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}$$

Il volume del cono, in funzione di x, è:

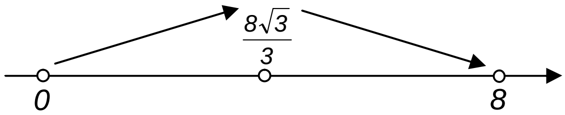
$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{TH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64 - x^2\right) \cdot x \quad \text{cioè:}$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64x - x^3\right) \quad \text{con } 0 < x < 8$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64 - 3x^2\right);$$

$$V'(x) = 0\,; \quad \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64 - 3x^2\right) = 0\,; \quad x = \mp\sqrt{\frac{64}{3}} = \mp\frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{di cui soltanto} \quad x = +\frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{è accettabile.}$$

$$V'(x) > 0\,; \quad \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64 - 3x^2\right) > 0\,; \quad 0 < x < \frac{8\sqrt{3}}{3}\,.$$



La funzione volume del cono presenta allora un massimo in $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Tale volume massimo vale: $V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(64 - \frac{64}{3}\right) \cdot 8\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{128}{3} \cdot 8\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi \cdot \frac{1024}{27}\sqrt{3} \approx 206{,}37$.

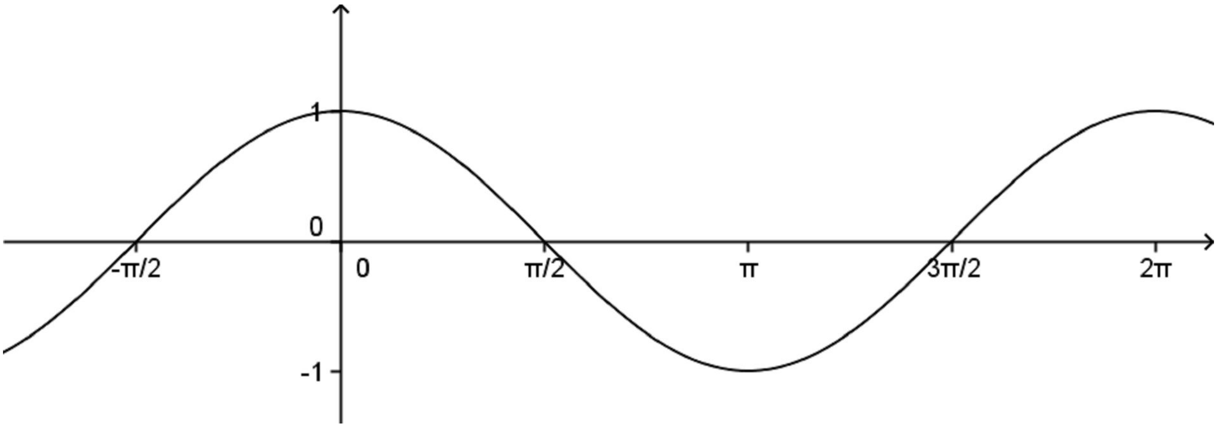
Pertanto il serbatoio ha una capacità $206{,}37$ *litri* .

Quesito 6

Si determini il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\cos x}$

Soluzione

$\cos x \geq 0\,;\qquad -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \qquad con\ \ k\in Z\ .$



Quesito 7

Per quale o quali valori di k la funzione $h(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4 & x\le 4 \\ k\,x^2-2x-1 & x>4 \end{cases}$

è continua in x = 4?

Soluzione

Affinché la funzione $h(x)$ *sia continua in 4 è necessario e sufficiente che i limiti destro e sinistro esistano, siano uguali e coincidano con il valore della funzione in* $x=4$.

Il valore della funzione in $x=4$ *è:* $f(4)=3\cdot 4^2-11\cdot 4-4=0$.

Il limite sinistro vale: $\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(3x^2-11x-4\right)=0$.

Il limite destro vale: $\lim_{x\to 4^+} h(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(k\,x^2-2x-1\right)=16k-9$.

Pertanto la funzione è continua in $x=4$ *se e solo se:* $16k-9=0$; *cioè se* $k=\dfrac{9}{16}$.

Quesito 8

Se $n > 3$ *e* $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ *sono in progressione aritmetica, qual è il valore di* n *?*

Soluzione

Applicando la definizione di progressione aritmetica si ha:

$$\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}$$

$$2\cdot\binom{n}{n-2}=\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}$$

Applicando la legge delle classi complementari: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

$$2\cdot\binom{n}{2}=\binom{n}{3}+\binom{n}{1}$$

$$2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{2\cdot 3}+n$$

$$n\cdot(n-1)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}+n$$

$$n\cdot(n-1)-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}-n=0$$

$$6n^2-6n-n\cdot\left(n^2-3n+2\right)-6n=0$$

$$6n^2-6n-n^3+3n^2-2n-6n=0$$

$$-n^3+9n^2-14n=0$$

$$n^3-9n^2+14n=0$$

$$n\cdot\left(n^2-9n+14\right)=0 \quad \left\langle \begin{array}{l} n=0 \\ n^2-9n+14=0 \end{array}\right. \qquad \left\langle \begin{array}{l} n=0 \\ n_1=2 \\ n_1=7 \end{array}\right.$$

Dovendo essere $n>3$ *, la soluzione accettabile è* $n=7$ *.*

Quesito 9

Si provi che non esiste un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ *con* $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$ *e* $A\hat{B}C=45°$. *Si provi altresì che se* $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$ *e* $A\hat{B}C=30°$, *allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.*

Soluzione

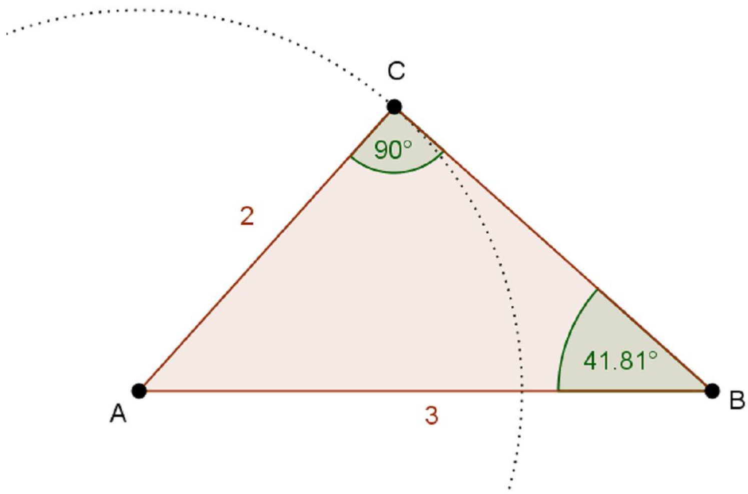
Per il I° Triangolo, applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} \;;\qquad \frac{3}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{2}{\operatorname{sen}45°}\;;$$

$$2\cdot\operatorname{sen}\hat{C}=3\cdot\operatorname{sen}45° \qquad \text{da cui:}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}45°=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1{,}06\;;$$

che è un'equazione impossibile.



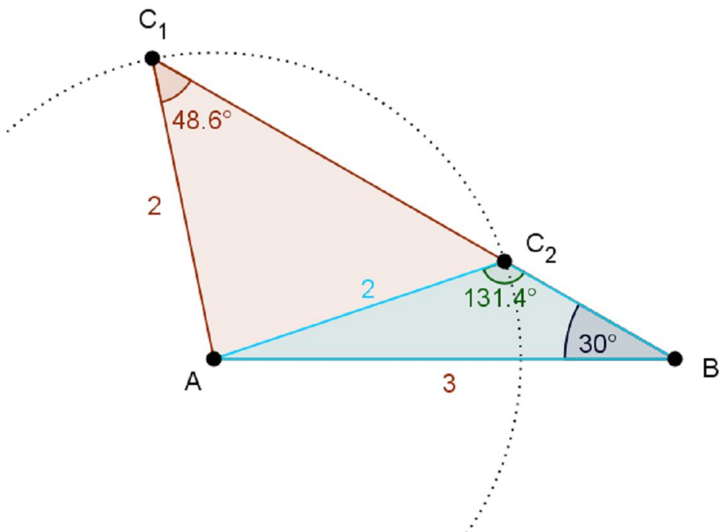
Per il II° Triangolo, applicando il teorema dei seni si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} \;;\qquad \frac{3}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{2}{\operatorname{sen}30°}\;;$$

$$2\cdot\operatorname{sen}\hat{C}=3\cdot\operatorname{sen}30° \qquad \text{da cui:}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}30°=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

che ammette due soluzioni $\left\langle \begin{array}{l} x=48{,}59° \\ x=131{,}41° \end{array}\right.$

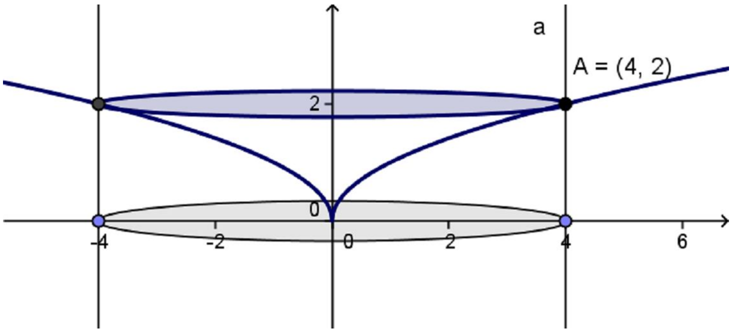


Quesito 10

Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Soluzione

Il volume del solido generato da R nella rotazione intorno all'asse y è dato dalla differenza fra il volume del cilindro con raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $x = y^2$ con $y \in [0,\ 2]$.



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \pi\int_a^b [f(y)]^2\ dx = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \pi\int_0^2 \left[y^2\right]^2\ dx = 32\pi - \pi\int_0^2 y^4\ dx = 32\pi - \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 =$$

$$= 32\pi - \pi\left[\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{160-32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi\ .$$