ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo Y: P.N.I. + scientifico autonomia + scientifico e scientifico-tecnologico Brocca + Proteo.

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2009

Tema di _______________

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1} & \text{per } x<0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ \text{arctg sen}x & \text{per } x>0. \end{cases}$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -1$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

1. Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{10}{3} - 6ln\frac{5}{3}$$

2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.
3. Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa x = 0 e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta y = k incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2 . Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità
$$S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$$
è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

QUESTIONARIO

1. Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità p = 1/2 assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?
2. Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \frac{e^{t^2}}{|t| + 1}\, dt$$
nel punto P di ascissa x = π/2.
4. Siano dati una sfera di raggio *r*, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.
5. Nell' omotetia di centro O(0,0) e rapporto k = -4, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.
6. Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a $1\ cm^2$.

7. Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + 4z = 0 \\ \lambda x + 5y + (2\lambda + 1)z = 0. \end{cases}$$

8. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.
9. Si consideri un cerchio di centro O e raggio *r* e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo 2x con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?
10. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.