

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo M: ordinamento + liceo della comunicazione

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2009

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a . Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $OC = a$. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:

$$(1) \quad \frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \operatorname{tg} \alpha$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ .
3. Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).
4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x), & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0 ?
E' derivabile in tale punto ?
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di t ($t > 0$), dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x) dx.$$

4. Si faccia vedere che $I(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0.
Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente ?

QUESTIONARIO

1. Una piramide, avente area di base B e altezza h , viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.
2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x - 1)}$ quando x tende a 1.
3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = \sqrt{3}$.
4. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.
5. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$

$$(1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ , parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ .

6. Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β .
7. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?
8. Data la parabola $x = -a y^2 + 3y$ (con $a > 0$), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.
9. Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.
10. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.