

Questionario

Quesito 1

Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^b |x - a| dx = a^2 + b^2$

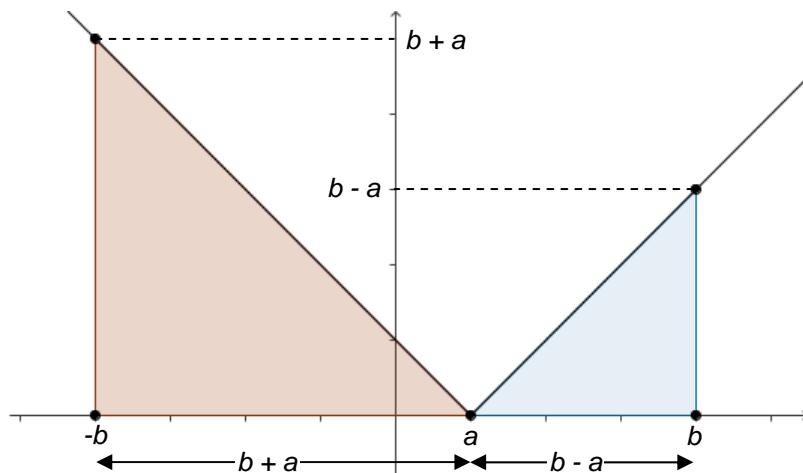
Soluzione 1

La funzione $y = |x - a| = \begin{cases} +(x - a) & \text{se } x - a \geq 0 \\ -(x - a) & \text{se } x - a < 0 \end{cases}$

cioè: $y = |x - a| = \begin{cases} x - a & \text{se } x \geq a \\ a - x & \text{se } x < a \end{cases}$

Il cui grafico è a lato:

Pertanto per la proprietà additiva degli integrali si ha:



$$\int_{-b}^b |x - a| dx = \int_{-b}^a |x - a| dx + \int_a^b |x - a| dx =$$

ma nell'intervallo $[-b, a)$ la variabile $x \in [-b, a)$ e quindi $x < a$, per cui: $|x - a| = -(x - a) = a - x$

mentre nell'intervallo $[a, b]$ la variabile $x \in [a, b]$ e quindi $x \geq a$, per cui: $|x - a| = +(x - a) = x - a$

$$\text{Pertanto: } \int_{-b}^a |x - a| dx + \int_a^b |x - a| dx = \int_{-b}^a (a - x) dx + \int_a^b (x - a) dx =$$

$$= \left[ax - \frac{x^2}{2} \right]_{-b}^a + \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^b = \left[a^2 - \frac{a^2}{2} - \left(-ab - \frac{b^2}{2} \right) \right] + \left[\frac{b^2}{2} - ab - \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \right) \right] =$$

$$= \left[\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} \right] + \left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right] = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 = a^2 + b^2 .$$

Soluzione 2

L'integrale $\int_{-b}^b |x - a| dx$ rappresenta graficamente l'area dei due triangoli evidenziati in figura.

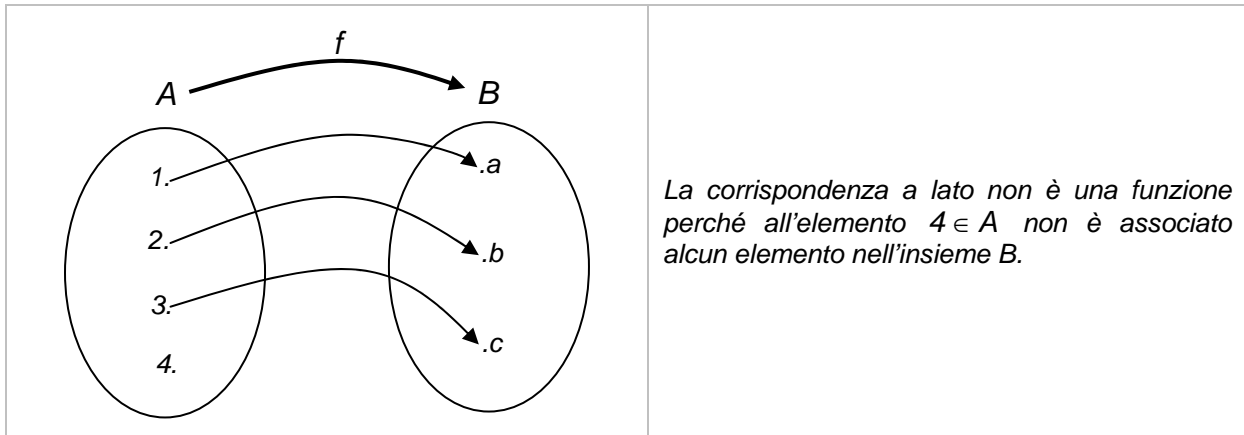
$$\text{Pertanto: } S = \frac{(b+a) \cdot (b+a)}{2} + \frac{(b-a) \cdot (b-a)}{2} = \frac{b^2 + a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab}{2} = a^2 + b^2 .$$

Quesito 2

Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

Soluzione

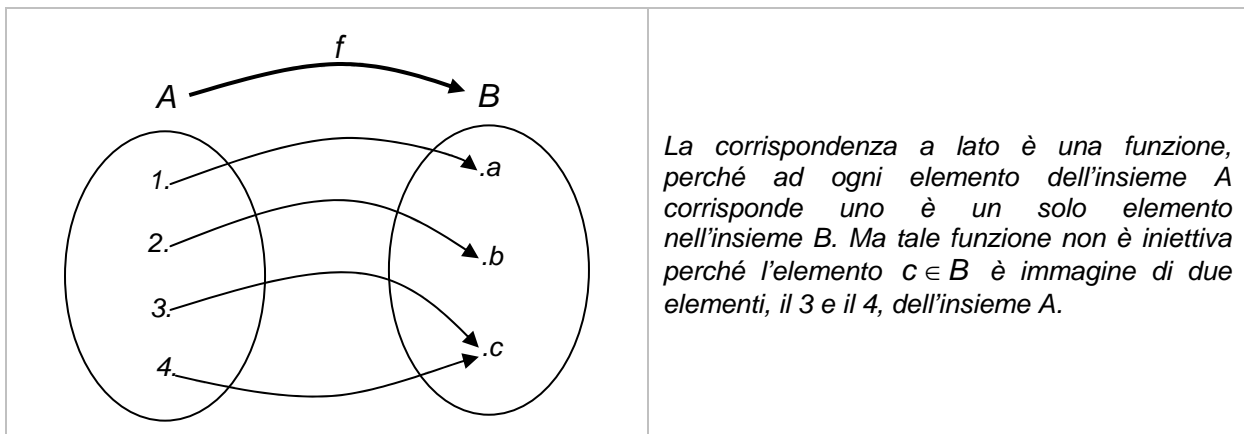
Una funzione è una corrispondenza fra due insiemi non vuoti A e B , che associa ad ogni elemento dell'insieme A uno ed un solo elemento dell'insieme B .



Ricordando la definizione di funzione iniettiva:

"una funzione si dice iniettiva quando ogni elemento dell'insieme B è immagine al più di un elemento dell'insieme A "

possiamo affermare che non esistono funzioni iniettive, poiché il numero degli elementi dell'insieme A è maggiore del numero degli elementi dell'insieme B .



Ricordando la definizione di funzione suriettiva:

"una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A "

possiamo affermare che le funzioni suriettive fra gli insiemi A e B esistono.

La funzione rappresentata sopra è una funzione suriettiva ma, come sopra dimostrato, non iniettiva.

Ricordando la definizione di funzione biiettiva:

"una funzione si dice biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva"

possiamo affermare che non esistono funzioni biiettive.

Quesito 3

Una moneta da due euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

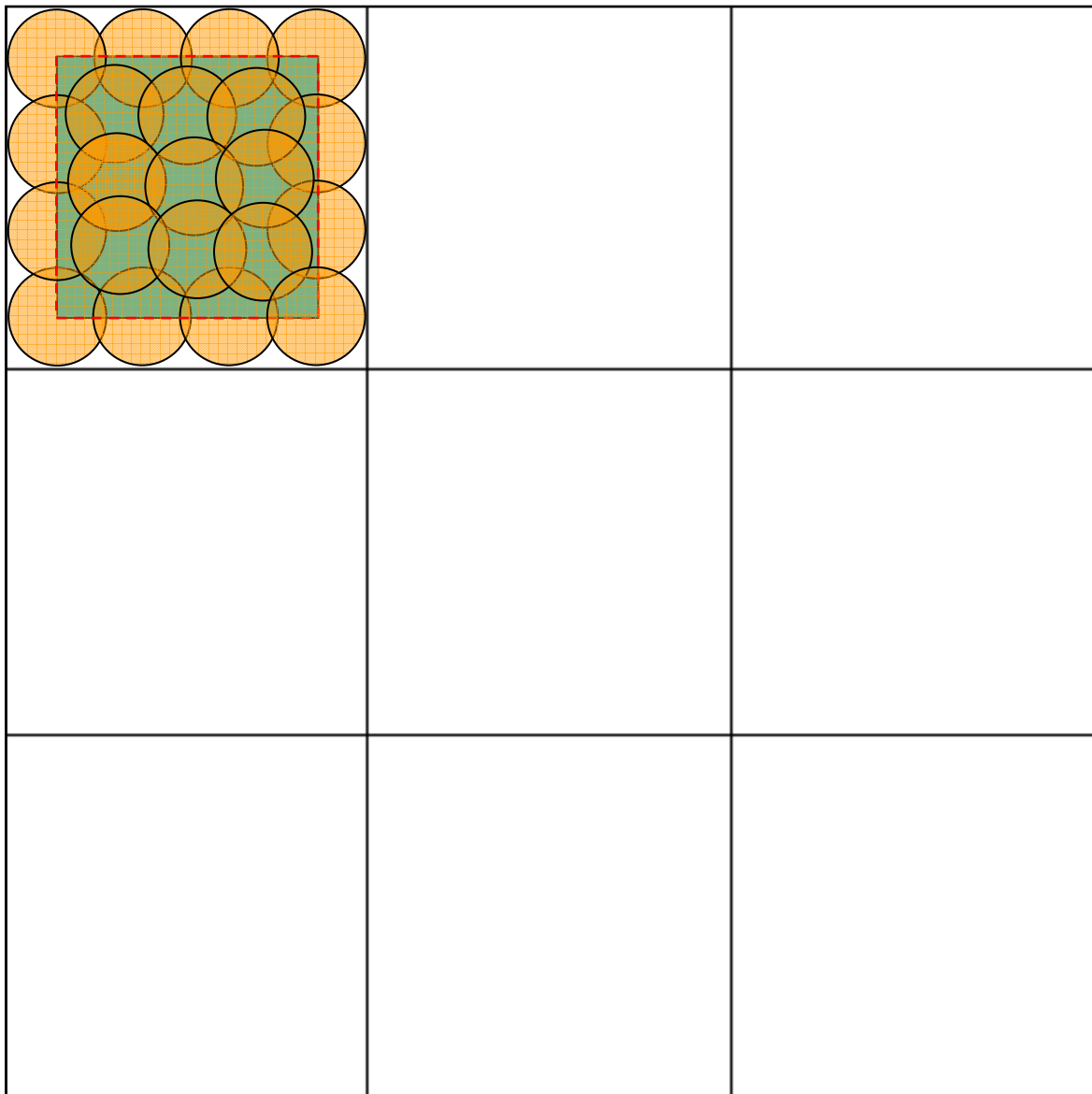
Soluzione

La moneta cade all'interno della mattonella quando il centro della moneta cade all'interno del quadrato interno tratteggiato.

Il lato del quadrato interno tratteggiato misura $l_2 = (100 - 25,75) \text{ mm} = 74,25 \text{ mm}$.

Pertanto la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella è:

$$P = \frac{\text{Area del quadrato tratteggiato}}{\text{Area della mattonella}} = \frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{74,25^2 \text{ mm}^2}{100^2 \text{ mm}^2} = \frac{5513,0625}{10^4} = 0,55130625 \approx 0,55 = 55\%.$$



Quesito 4

“Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. Diversamente dagli analoghi poligoni regolari nel piano, che possono avere un infinito numero di lati, i poliedri regolari, nello spazio, sono solo cinque.

Infatti in ogni vertice del poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere minore di 360 gradi; in caso contrario le facce si appiattirebbero in uno stesso piano.

Questo implica che non è possibile avere facce esagonali o con un numero maggiore di lati, dato che questi poligoni hanno angoli interni maggiori o uguali a 120 gradi.

Pertanto:

- ✚ se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (angoli di 60°), si hanno tre casi:
 - 3 facce (somma degli angoli uguale a 180°) – TETRAEDRO (4 triangoli equilateri)
 - 4 facce (somma degli angoli uguale a 240°) – OTTAEDRO (8 triangoli equilateri)
 - 5 facce (somma degli angoli uguale a 300°) – ICOSAEDRO (20 triangoli equilateri)

Non si possono costruire poliedri regolari aventi 6 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360° , e quindi tassellano il piano.

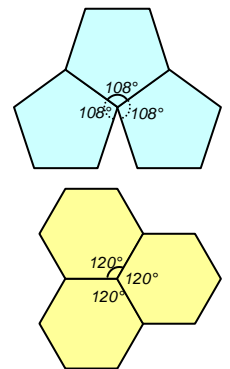
- ✚ se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (angoli di 90°), si ha solo un caso:
 - 3 facce (somma degli angoli uguale a 270°) – CUBO o ESAEDRO (6 quadrati)

Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360° , e quindi tassellano il piano.

- ✚ se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (angoli di 108°) si ha solo un caso:
 - 3 facce (somma degli angoli uguale a 324°) – DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).

Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 432° , e quindi il poliedro è irrealizzabile.

- ✚ **Non si possono costruire poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari perché 3 esagoni regolari tassellano il piano (somma degli angoli uguale a $3 \cdot 120 = 360^\circ$).**



I cinque corpi regolari

				
Tetraedro 4 facce triangolari 6 spigoli 4 vertici	Cubo 6 facce quadrate 12 spigoli 8 vertici	Ottaedro 8 facce triangolari 12 spigoli 6 vertici	Icosaedro 20 facce triangolari 30 spigoli 12 vertici	Dodecaedro 12 facce pentagonali 30 spigoli 20 vertici

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei 5 poliedri regolari.

Platone userà questa straordinaria scoperta come simbologia dell'universo e dei suoi elementi base: il fuoco (tetraedro), la terra (cubo), l'aria (ottaedro) e l'acqua (l'icosaedro). Il quinto poliedro regolare, il dodecaedro, era a simboleggiare la quinta essenza che tutto avvolge e comprende. La metafora ha un qualche senso matematico dato che è possibile dimostrare che l'unico poliedro regolare nel quale sia possibile inscrivere gli altri 4 è il dodecaedro. Questa tradizione neo-platonica resterà viva fino a Keplero che credette di poter descrivere i moti dei pianeti in termini di poliedri e loro reciproche inclusioni.

Quesito 5

Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Soluzione

Una frazione è una coppia ordinata di numeri interi, di cui il secondo è diverso da 0.

In simboli: $\frac{n}{d}$ con $n, d \in \mathbb{Z}$ e $d \neq 0$.

Pertanto in base a questa definizione soltanto la prima frazione ha significato, e il suo valore è zero.

Infatti: $\frac{0}{1} = 0$ perché $0 \cdot 1 = 0$

Inoltre:

$\frac{0}{0} = x$ perché $0 \cdot x = 0$ ma di numeri che moltiplicati per zero danno risultato zero c'è ne sono infiniti.

$\frac{1}{0} = x$ perché $0 \cdot x = 1$ non esiste alcun numero che moltiplicato per zero dà per risultato zero.

Ricordando infine che $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \Rightarrow 0^0 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{0 \text{ volte}} = ?$

moltiplicare zero per se stesso zero volte non ha alcun significato.

Quesito 6

Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\text{sen}x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

Soluzione

Applicando il procedimento iterativo di Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

all'equazione $\text{sen}x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$, si ha:

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{\text{sen } 3}{\cos 3} = 3 - \text{tg } 3 \approx 3,142546543$$

$$x_2 = 3,142546543 - \text{tg } 3,142546543 \approx 3,141592653$$

Ricordando il grafico del seno, che si annulla in $x = \pi$, la soluzione ottenuta è un'approssimazione di π con 9 cifre decimali esatte.

Il valore di π con 15 cifre decimali esatte è: $\pi \approx 3,141592653589793$.

Quesito 7

Si dimostri l'identità: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

Soluzione

Dalla definizione di coefficiente binomiale si ha:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)} \cdot \frac{n-k}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)! [n-(k+1)]!} = \binom{n}{k+1}.$$

Quesito 8

Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

Soluzione

Sia u il numero degli uomini partecipanti alla festa, e sia d il numero delle donne partecipanti alla festa. Se l'età media degli uomini è 26 e l'età media delle donne è 19, vuol dire che:

l'età totale degli uomini è: $26u$, mentre l'età totale delle donne è $19d$.

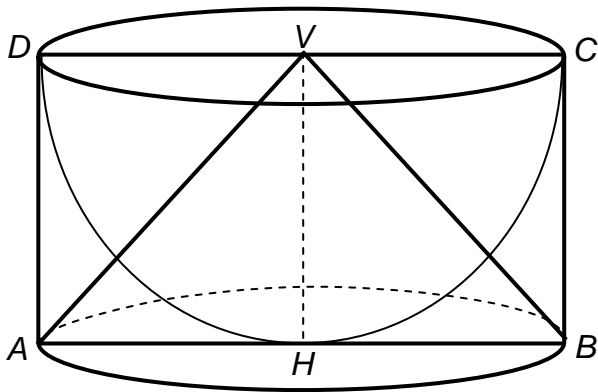
Se l'età media dei partecipanti è di 22 anni, vuol dire che:

$$\frac{\text{Totale anni dei partecipanti}}{\text{Numero dei partecipanti}} = 22 \quad \text{cioè:} \quad \frac{26u + 19d}{u + d} = 22$$

$$\text{Essendo } u + d \neq 0 \quad \text{si ha:} \quad 26u + 19d = 22u + 22d; \quad 4u = 3d; \quad \frac{u}{d} = \frac{3}{4}.$$

Pertanto il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne è $\frac{3}{4}$.

Quesito 9



Nei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama scodella considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.

Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.

Soluzione

Riprendiamo innanzitutto il principio di Cavalieri:

“due solidi sono equivalenti se si può fissare un piano in modo che ogni altro piano parallelo a esso tagli i due solidi in sezioni equivalenti”.

Consideriamo un piano parallelo alla base del cono, distante x dal vertice, cioè:

$$\overline{OV} = x, \text{ con } 0 \leq x \leq r.$$

La sezione formata col cono è una circonferenza di raggio OP .

Essendo il triangolo VOP un triangolo rettangolo isoscele, si ha: $\overline{OV} = \overline{OP} = x$.

Pertanto la sezione del cono, a distanza x dal vertice, ha area: $S_1 = \pi \cdot x^2$.

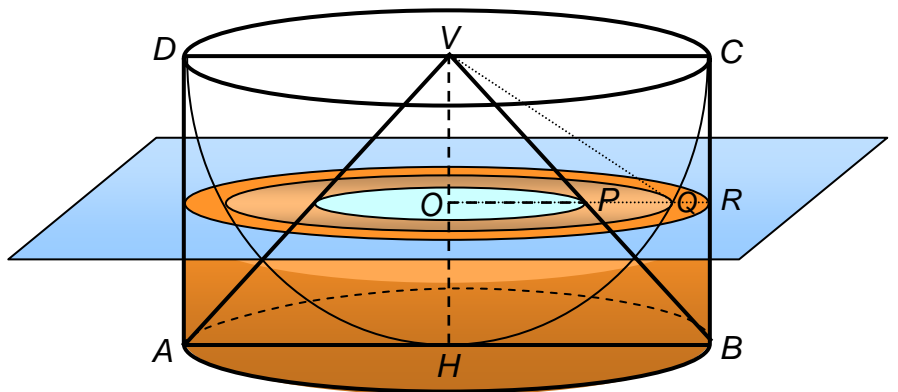
Per trovare la sezione della scodella, che è una corona circolare di raggio esterno $\overline{OR} = r$, occorre determinare il raggio interno \overline{OQ} con il teorema di Pitagora.

$$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{QV}^2 - \overline{OV}^2} = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pertanto la sezione della scodella, a distanza x dalla base, ha area:

$$S_2 = \pi \cdot (\overline{OR}^2 - \overline{OQ}^2) = \pi \cdot [r^2 - (r^2 - x^2)] = \pi \cdot x^2$$

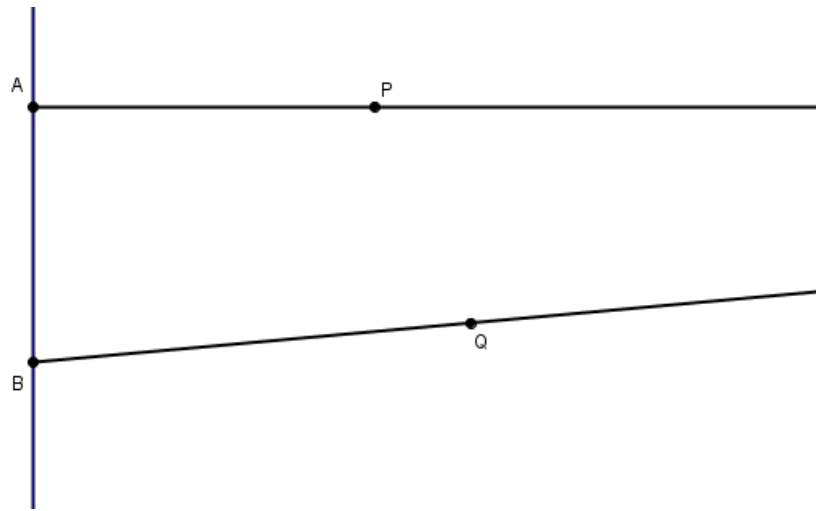
In definitiva, poiché $S_1 = S_2 = \pi \cdot x^2$, per il principio di Cavalieri, i due solidi sono equivalenti, cioè hanno lo stesso volume.



Quesito 10

“Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli \hat{PAB} e \hat{QBA} hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare”

Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Soluzione

La proposizione riportata nel testo è il V Postulato di Euclide. Euclide, matematico greco vissuto nel 300 a.C., realizzò un'opera (gli *Elementi*), sulle conoscenze di Matematica elementare possedute dagli antichi Greci.

La teoria geometrica presentata in quest'opera è sviluppata a partire da cinque postulati (proposizioni considerate vere sulla base dell'evidenza e dell'intuizione comune).

Il V Postulato, a differenza dei precedenti, si contraddistinse, fin da subito, per la complessità del suo enunciato e per la costruzione geometrica.

Inizialmente si tentò di dimostrarlo a partire dai primi quattro: in questo modo il V Postulato sarebbe stato dedotto come un teorema. Tuttavia i numerosi tentativi compiuti in questa direzione si dimostrarono sempre fallimentari.

Il dibattito sulla validità del V Postulato si è protratto per oltre duemila anni.

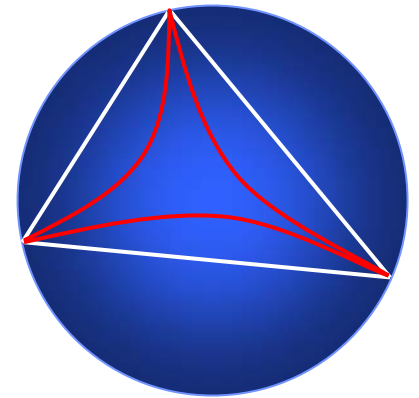
All'inizio del XIX secolo i matematici incominciarono a convincersi dell'impossibilità di dimostrare il V postulato e iniziarono i tentativi per costruire altre geometrie che facevano a meno di tale postulato.

Nella prima metà del XIX secolo i matematici Bolyai e Lobacevskij furono i primi a costruire una geometria non euclidea, ottenuta sostituendo il V Postulato con la sua negazione (geometria iperbolica).

Nella geometria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, esistono infinite rette passanti per il punto dato che non intersecano la retta.

In tale geometria viene negata l'unicità della parallela ad una retta data passante per un punto. Per un punto P passano infinite parallele alla retta data.

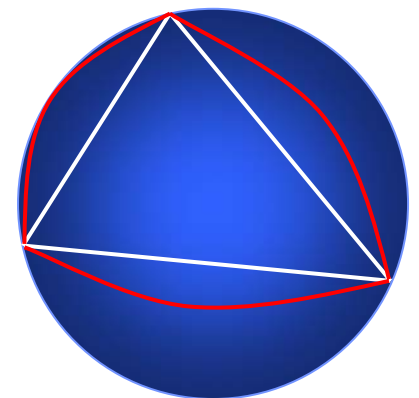
In questa struttura, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto. I lati non sono segmenti ma archi di iperboli perpendicolari al cerchio esterno.



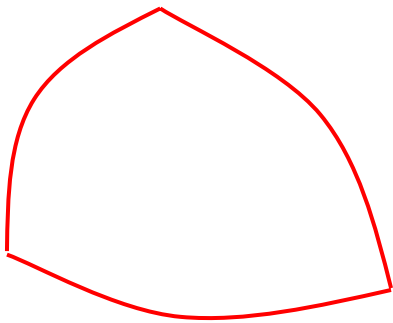
Nella geometria ellittica di Riemann viene negata l'esistenza stessa di una parallela alla retta r passante per il punto P .

In questa geometria la somma degli angoli di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto ed i lati non sono segmenti ma archi di circonferenza.

Un modello di geometria ellittica si ottiene se si considera una superficie sferica e su di essa si considerano come "rette" le circonferenze massime.

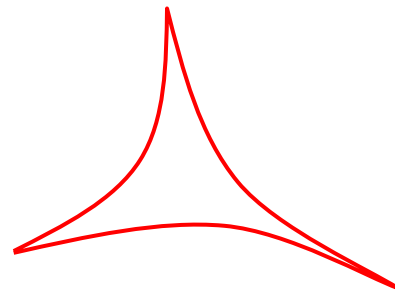


Triangolo ellittico



$$\alpha' + \beta' + \gamma > 180^\circ$$

Triangolo iperbolico



$$\alpha' + \beta' + \gamma < 180^\circ$$