ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Quesito 8

Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

Soluzione

La funzione $f_1 = \pi^x$, essendo una funzione esponenziale con base maggiore di 1, è definita $\forall x \in R$.

La funzione $f_2 = x^\pi$, essendo una potenza reale di base reale, è definita solo se la base è positiva.

Pertanto il dominio di f è: $Dom(f) = (0, +\infty)$.

Tuttavia, essendo l'esponente positivo, si può considerare facente parte del Dominio anche il punto $x = 0$.

In definitiva il dominio di f è: $Dom(f) = [0, +\infty)$.

La derivata prima è: $f^I(x) = \pi^x \cdot \log\pi - \pi \cdot x^{\pi-1}$.

$f^I(\pi) = \pi^\pi \cdot \log\pi - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi \cdot (\log\pi - 1)$,

essendo $\log\pi > 1 \Rightarrow \log\pi - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{f^I(x) > 0}$

La derivata seconda è: $f^{II}(x) = \pi^x \cdot (\log\pi)^2 - \pi \cdot (\pi - 1)x^{\pi-2}$.

$f^{II}(\pi) = \pi^\pi \cdot (\log\pi)^2 - \pi \cdot (\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-2} = \pi^\pi \cdot (\log\pi)^2 - (\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi \cdot (\log\pi)^2 - \pi \cdot \pi^{\pi-1} + \pi^{\pi-1} =$

$= \pi^\pi \cdot (\log\pi)^2 - \pi^\pi + \pi^{\pi-1} = \pi^\pi \cdot \left[(\log\pi)^2 - 1\right] + \pi^{\pi-1}$,

essendo $\log\pi > 1 \Rightarrow (\log\pi)^2 > 1 \Rightarrow \left[(\log\pi)^2 - 1\right] > 0 \Rightarrow \boxed{f^{II}(x) > 0}$

In definitiva, nel punto $x = \pi$ le derivate, prima e seconda, sono entrambe positive.