

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Quesito 4

Si esponga la regola del marchese De L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare

che è: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

Soluzione

De L'Hôpital dice che:

Teorema 1

$$\left(\begin{array}{l} \text{Siano } f(x) \text{ e } g(x) \text{ due funzioni :} \\ - \text{ continue in } [a, b] \text{ e derivabili in } (a, b) \\ \text{escluso al più il punto } x_0 \in (a, b) \\ - g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) - \{x_0\} \\ - f(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad g(x_0) = 0 \\ - \text{ esiste (finito o infinito) il } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Teorema 2

$$\left(\begin{array}{l} \text{Siano } f(x) \text{ e } g(x) \text{ due funzioni :} \\ - \text{ derivabili in } (a, b) \text{ escluso al più il punto } x_0 \in (a, b) \\ - g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) - \{x_0\} \\ - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \\ - \text{ esiste (finito o infinito) il } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Il limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2008}}{2^x}$ si presenta sotto la forma di indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$.

Le due funzioni soddisfano il II° Teorema di De L'Hôpital.

Applicando 2008 volte il Teorema di De L'Hôpital si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2008}}{2^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2008 \cdot x^{2007}}{2^x \cdot \log 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot x^{2006}}{2^x \cdot \log 2 \cdot \log 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006 \cdot x^{2005}}{2^x \cdot \log 2 \cdot \log 2 \cdot \log 2} = \dots \\ \dots &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2008!}{(\log 2)^{2008}} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{2008!}{(\log 2)^{2008}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0. \quad (\text{Essendo il } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0) \end{aligned}$$