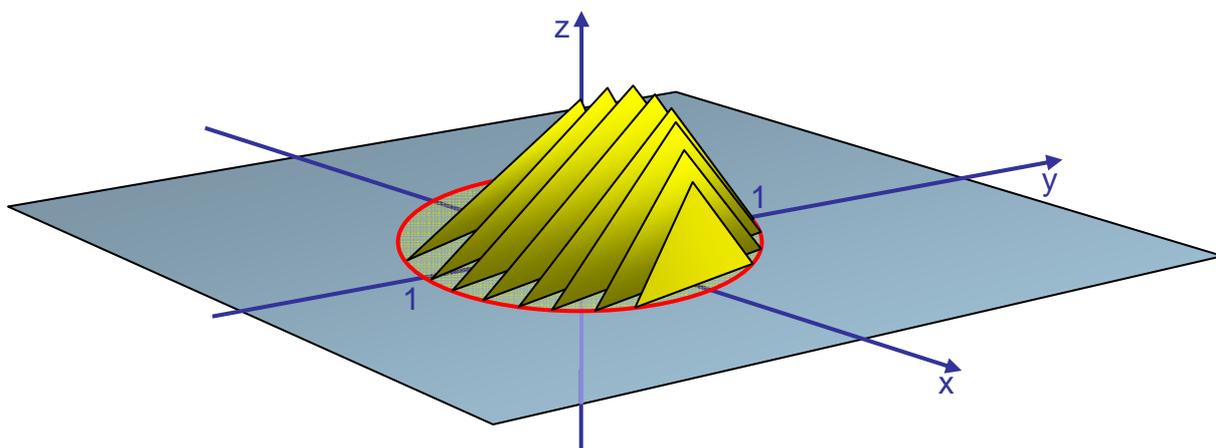


PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Quesito 3

Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.



Soluzione

Consideriamo un conveniente sistema di riferimento $Oxyz$, con la base del solido (il cerchio di raggio 1) con il centro nell'origine e piano di appoggio sul piano xy .

Il volume del solido si calcola con la formula: $V = \int_{-1}^1 S(x) dx$,

dove $S(x)$ è l'area della sezione triangolare del solido V .

Ponendo uguale a x la distanza tra il diametro e un piano perpendicolare ad esso ($OH = x$), dal triangolo rettangolo OPH si ha che: $PH = \sqrt{1 - x^2}$.

Pertanto il lato del triangolo equilatero vale: $PR = 2\sqrt{1 - x^2}$

L'area del triangolo equilatero vale: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{1 - x^2})^2 = \sqrt{3} \cdot (1 - x^2)$.

Pertanto il volume del solido richiesto è:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3} \cdot (1 - x^2) dx = \sqrt{3} \cdot \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \sqrt{3} \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \sqrt{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right) \right] = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right] = \frac{4}{3} \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

