ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2008

CORSO DI ORDINAMENTO

Quesito 5

Si determini un polinomio $p(x)$ *di terzo grado tale che:* $p(0) = p'(0) = 0$, $p(1) = 0$ *e* $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{1}{12}$

Soluzione 1

Un polinomio di terzo grado è del tipo: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La sua derivata è: $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

L'integrale indefinito è: $\int \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)dx = a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx + K$

L'integrale definito è: $\int_0^1 \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)dx = \left[a\frac{1}{4} + b\frac{1}{3} + c\frac{1}{2} + d\cdot 1 - 0\right] = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d$.

Imponendo le condizioni del quesito si ha:

$$\begin{cases} a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 0 \\ 3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0 \\ a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{1}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3a + 4b + 6c + 12d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ a + b = 0 \\ 3a + 4b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ b = -a \\ 3a - 4a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ b = +1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Pertanto il polinomio richiesto è: $p(x) = -x^3 + x^2$

Soluzione 2

Un polinomio di terzo grado è del tipo: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La sua derivata è: $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

La condizione iniziale $p(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$

La condizione iniziale $p'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$

La condizione iniziale $p(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 0 ; \quad a + b = 0 ; \quad b = -a$

Pertanto il polinomio richiesto ha la forma: $p(x) = ax^3 - ax^2$.

Sfruttando la condizione: $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{1}{12}$ si determina il valore del parametro a .

$$\int_0^1 \left(ax^3 - ax^2\right)dx = \frac{1}{12} ; \quad a\cdot\int_0^1 \left(x^3 - x^2\right)dx = \frac{1}{12} ; \quad a\cdot\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12} ; \quad a\cdot\left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3}\right] = \frac{1}{12} ;$$

$a\cdot\left[-\frac{1}{12}\right] = \frac{1}{12}$; da cui si ha: $a = -1$. Pertanto il polinomio richiesto è: $p(x) = -x^2\cdot(x-1)$.

Soluzione 3

Il fatto che $p(0)=0$ e $p'(0)=0$ vuol dire che c'è una radice doppia in $x=0$. Un'altra radice è $x=1$.
Pertanto il polinomio richiesto ha la forma: $p(x)=ax^2\cdot(x-1)$.

Sfruttando la condizione: $\int_0^1 p(x)\,dx=\frac{1}{12}$ si determina il valore del parametro a.

$$\int_0^1 ax^2\cdot(x-1)\ dx=\frac{1}{12};\quad a\cdot\int_0^1\left(x^3-x^2\right)dx=\frac{1}{12};\quad a\cdot\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{12};\quad a\cdot\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}\right]=\frac{1}{12};$$

$a\cdot\left[-\frac{1}{12}\right]=\frac{1}{12}$; da cui si ha: $a=-1$.

Pertanto il polinomio richiesto è: $p(x)=-x^2\cdot(x-1)$.