

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 9

La funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$ è una funzione definita, continua e derivabile in tutto R .
Tocca l'asse delle y nel punto $A(0; 6)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 6x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 6x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) = -\infty$$

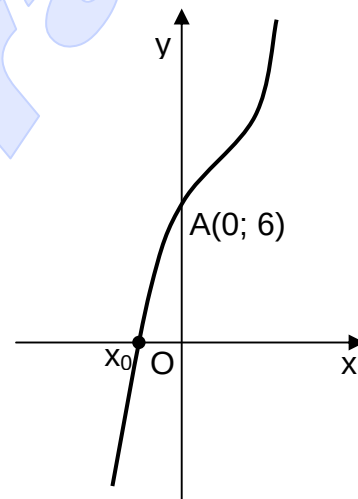
La sua derivata prima è: $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$.

La derivata prima non si annulla mai, infatti: $\Delta < 0$

La derivata $f'(x) > 0 \quad \forall x \in R$. Per cui la funzione è sempre crescente.

Con queste informazioni si può tracciare il grafico sommario della funzione.

Da esso si evince che la curva tocca l'asse delle x soltanto in un punto x_0 .



Per trovare tale punto utilizziamo il *metodo di bisezione*.

Per determinare in quale intervallo cade la radice, conviene trasformare l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ nel sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y - 3x^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 3x^2 - 6x - 6 \end{cases}$$

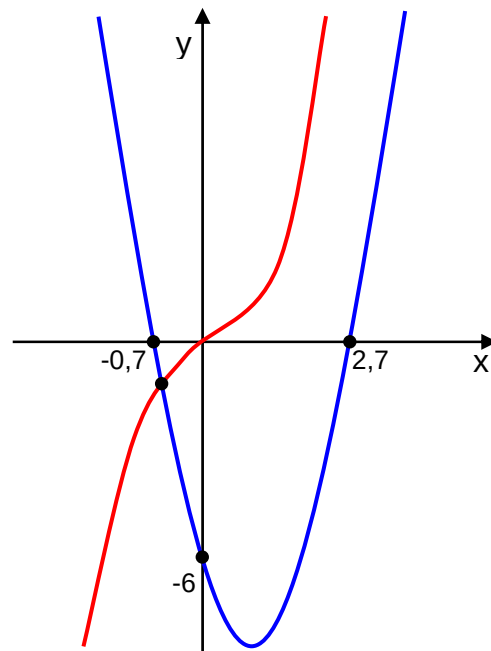
e tracciare il grafico di queste funzioni.

La cubica $y = 2x^3$ ha il grafico elementare a lato (*in rosso*).

La parabola $y = 3x^2 - 6x - 6 = 0$ interseca gli assi cartesiani nei punti:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 6x - 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; -6)$$

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 6x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B(1 - \sqrt{3}; 0) \\ C(1 + \sqrt{3}; 0) \end{matrix}$$



Pertanto la radice cercata si trova nell'intervallo $(-1; 0)$.

Nel punto medio $x = -\frac{1}{2} = -0,5$ di tale intervallo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

$$\Rightarrow x_0 \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$

Nel punto medio $x = -\frac{3}{4} = -0,75$ di tale intervallo $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{33}{32}$

$$\Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$$

Nel punto medio $x = -\frac{5}{8} = -0,625$ di tale intervallo $f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{151}{256} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{8}\right)$

Nel punto medio $x = -\frac{11}{16} = -0,688$ di tale intervallo $f\left(-\frac{11}{16}\right) = -\frac{395}{2048} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{11}{16}; -\frac{5}{8}\right)$

Nel punto medio $x = -\frac{21}{32} = -0,656$ di tale intervallo $f\left(-\frac{21}{32}\right) = \frac{3343}{16384} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{11}{16}; -\frac{21}{32}\right)$

Nel punto medio $x = -\frac{43}{64} = -0,672$ di tale intervallo $f\left(-\frac{43}{64}\right) = \frac{1037}{131072} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{11}{16}; -\frac{43}{64}\right)$

Nel punto medio $x = -\frac{87}{128} = -0,679$ di tale intervallo $f\left(-\frac{87}{128}\right) = -\frac{96519}{1048576} \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{87}{128}; -\frac{43}{64}\right)$

Pertanto, la radice richiesta, con una precisione di due cifre significative, è $x_0 = -0,67$.

II° Metodo - Metodo delle tangenti

La radice da cercare si trova nell'intervallo $(a = -1; b = 0)$.

$$f(a = -1) = -2 - 3 - 6 + 6 = -5 < 0$$

$$f(b = 0) = 6 > 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$$

$$f'(x) > 0; \quad \forall x \in (-1; 0)$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(x) > 0; \quad 12x - 6 > 0; \quad x > \frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0; \quad \forall x \in (-1; 0)$$

Posto $x_0 = a$, dal grafico si evince che i valori:

$x_1, x_2, \dots, x_n$, ottenuti con il metodo delle tangenti forniscono dei valori per difetto della radice cercata.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-5}{18} = \frac{-18 + 5}{18} = -\frac{13}{18} \cong -0,722$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{13}{18} - \frac{\frac{-475}{729}}{\frac{727}{729}} = -\frac{13}{18} + \frac{950}{19629} = \frac{-28353 + 1900}{39258} = -\frac{26453}{39258} \cong 0,673$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\frac{26453}{39258} - \frac{\frac{128196515000}{7563007395189}}{\frac{3279443647}{256865094}} = -\frac{26453}{39258} + \frac{256393030000}{193116598040889} =$$

$$= -\frac{259740582322273}{386233196081778} \cong 0,672$$

Pertanto, la radice richiesta, con una precisione di due cifre significative, è $x_0 \cong -0,67$.

