

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 4

Ponendo la misura del raggio della circonferenza di base del cono $r = x$ con $0 \leq x \leq 1$.

Si ha che l'altezza del cono è: $h = \sqrt{1 - x^2}$

Pertanto la funzione, rappresentante il volume del cono,

da rendere massima è: $V(x) = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$.

Ma essendo $\frac{1}{3} \pi$ una quantità costante, è sufficiente studiare

la funzione: $\bar{V}(x) = x^2 \sqrt{1 - x^2}$

La derivata prima è:

$$\begin{aligned} \bar{V}'(x) &= 2x\sqrt{1-x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2x\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x \cdot (1-x^2) - 2x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{4x - 4x^3 - 2x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x - 6x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x \cdot (2 - 3x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x \cdot (2 - 3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

La derivata prima si annulla in:

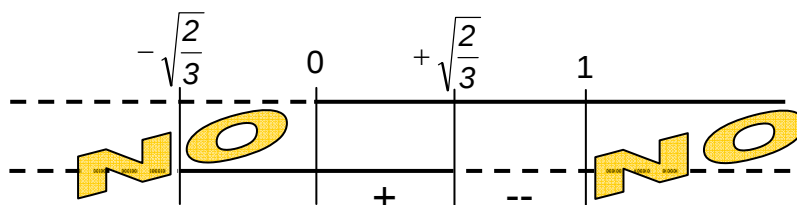
$$\bar{V}'(x) = 0 ; \frac{x \cdot (2 - 3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 ; \begin{matrix} x = 0 & x = 0 \\ x \cdot (2 - 3x^2) = 0 & 2 - 3x^2 = 0 \end{matrix} ; \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

La derivata prima è positiva in:

$$\bar{V}'(x) > 0 ; \frac{x \cdot (2 - 3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} > 0 ; x \cdot (2 - 3x^2) > 0 ;$$

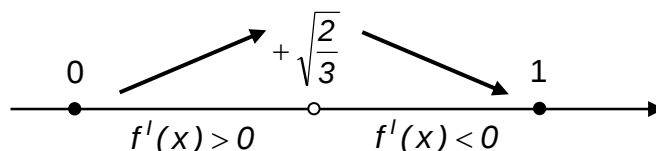
$$x > 0$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < +\sqrt{\frac{2}{3}}$$



Il segno della derivata prima è:

Pertanto il volume è massimo per $x = +\sqrt{\frac{2}{3}}$



$$\text{Il volume max è } V = \frac{1}{3} \pi \sqrt{\frac{2}{3}}^2 \cdot \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}^2} = \frac{1}{3} \pi \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{9} \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi \cong 0,403 \text{ m}^3$$

Cioè circa 403 litri .

II° Metodo

Ponendo la misura dell'altezza del cono $h = x$, con la limitazione $0 \leq x \leq 1$.

Si ha che il raggio è: $r = \sqrt{1 - x^2}$ ed il volume del cono: $V(x) = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{1 - x^2})^2 \cdot x$;

cioè: $V(x) = \frac{\pi}{3} x \cdot (1 - x^2)$.

La derivata prima è:

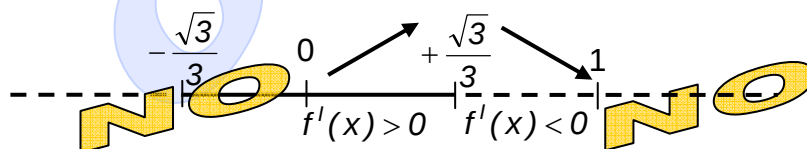
$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (1 - x^2) + \frac{\pi}{3} x \cdot (-2x) = \frac{\pi}{3} \cdot [1 - x^2 - 2x^2] = \frac{\pi}{3} \cdot [1 - 3x^2]$$

La derivata prima si annulla in:

$$V'(x) = 0 ; ; \frac{\pi}{3} \cdot [1 - 3x^2] = 0 ; 1 - 3x^2 = 0 ; x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La derivata prima è positiva in:

$$V'(x) > 0 ; -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < +\frac{\sqrt{3}}{3} ;$$



Pertanto il volume è massimo per $x = +\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Il volume max è } V(x) = \frac{\pi}{3} x \cdot (1 - x^2) = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi \cong 0,403 \text{ m}^3 .$$

Cioè circa 403 litri .