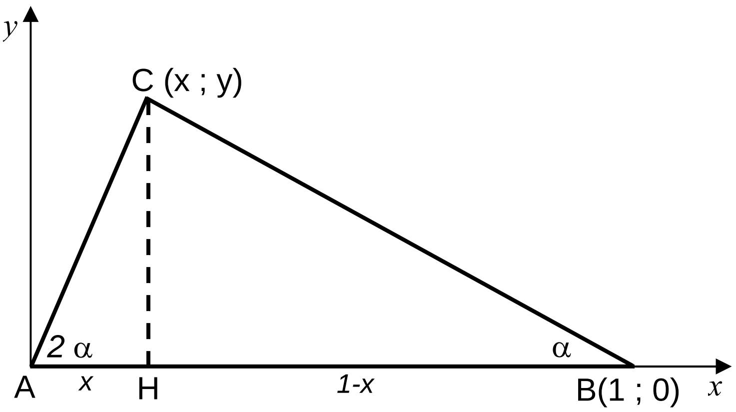
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2007

CORSO DI ORDINAMENTO

Problema 1



Punto 1

Nel sistema di riferimento scelto (vedi figura) conviene porre $A\hat{B}C = \alpha \quad \Rightarrow \quad B\hat{A}C = 2\alpha$.

Essendo il punto $C(x; y)$ variabile, si ha che:
$AH = x$ e $BH = 1 - x$.

Dal triangolo rettangolo $A\overset{\Delta}{C}H$ si ha:
$y = x \cdot tg\, 2\alpha$ *(1)*

Dal triangolo rettangolo $B\overset{\Delta}{C}H$ si ha:
$y = (1-x) \cdot tg\, \alpha$ *(2)*

Pertanto le equazioni parametriche del punto C sono: $\begin{cases} y = x \cdot tg\, 2\alpha \\ y = (1-x) \cdot tg\, \alpha \end{cases}$

Ricordando che: $tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\alpha}$ la *(1)* diventa: $y = x \cdot \dfrac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ *(3)*

Ricavando dalla *(2)* $tg\, \alpha = \dfrac{y}{1-x}$ e sostituendola nella *(3)* si ottiene:

$$y = x \cdot \frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\alpha} \; ; \quad y = x \cdot \frac{2 \cdot \dfrac{y}{1-x}}{1 - \left(\dfrac{y}{1-x}\right)^2} \; ; \quad y = x \cdot \frac{\dfrac{2y}{1-x}}{\dfrac{(1-x)^2 - y^2}{(1-x)^2}} \; ; \quad y = x \cdot \frac{2y}{1-x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - y^2} \; ;$$

$$y = \frac{2xy \cdot (1-x)}{(1-x)^2 - y^2} \; ; \quad y \cdot \left[(1-x)^2 - y^2\right] = 2xy \cdot (1-x) \; .$$

Dividendo per $y \neq 0$ *(y=0 ⇔ altezza triangolo uguale a zero ⇔ il triangolo degenera in un segmento)*

$$(1-x)^2 - y^2 = 2x \cdot (1-x) \; ; \quad 1 + x^2 - 2x - y^2 = 2x - 2x^2 \; ; \quad \boxed{3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0} \; .$$

Punto 2 - *I° Metodo*

L'equazione $1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0$ rappresenta l'equazione di un'iperbole traslata, infatti:

$$1 + 3x^2 - 4x - y^2 = 0 \; ; \quad 3x^2 - 4x - y^2 = -1 \; ; \quad 3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) - y^2 = -1 \; ;$$

$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - y^2 = -1 \; ; \quad 3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 3 \cdot \frac{4}{9} - y^2 = -1 \; ;$$

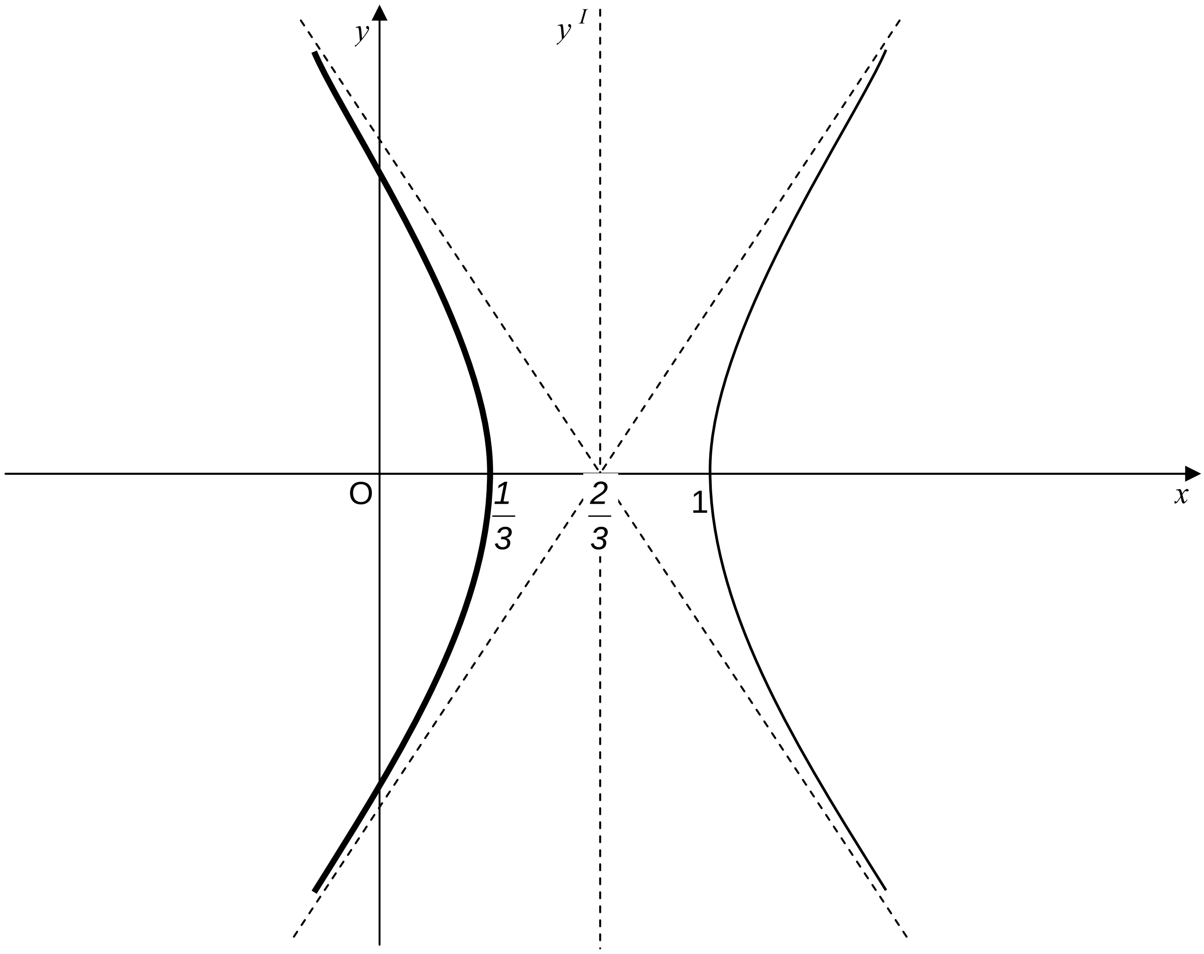
$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3} - y^2 = -1 \; ; \quad 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{4}{3} - 1 \; ; \quad 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3} \; ;$$

$$9 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1 \; ; \quad \frac{\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2}{\dfrac{1}{9}} - \frac{y^2}{\dfrac{1}{3}} = 1 \; .$$

Effettuando una traslazione degli assi: $\begin{cases} x' = x - 2/3 \\ y' = y \end{cases}$ si ottiene la forma canonica dell'iperbole a centro:

$\dfrac{x'^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y'^2}{\frac{1}{3}} = 1$; avente semiasse trasverso $a = \dfrac{1}{3}$, semiasse non trasverso $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ed asintoti le rette:

$y' = \pm \dfrac{b}{a} x'$; $y' = \pm\sqrt{3}x'$; cioè, nel vecchio sistema Oxy: $y = \pm\sqrt{3} \cdot (x - 2/3)$.



Il grafico del luogo geometrico richiesto è limitato all'intervallo $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$.

Infatti l'angolo $A\hat{B}C = \alpha$ ha la seguente limitazione: $0 \le \alpha + 2\alpha \le \pi$; $0 \le 3\alpha \le \pi$; $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{3}$.

- Quando $\alpha \to 0 \;\Rightarrow\; x \to \dfrac{1}{3}$, *infatti dalla relazione:* $\dfrac{AC}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{BC}{\operatorname{sen}2\alpha}$ *si ha:* $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$

  ed essendo: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} \overset{H}{=} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{2}$

  vuol dire che: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\;$ *per* $\alpha \to 0 \;\Rightarrow\; AC \to \dfrac{1}{2}BC$ *(*)*

  ma quando $\alpha \to 0 \;\Leftrightarrow\;$ *il vertice* C *del triangolo si abbassa sulla base* AB .

  Pertanto in questa situazione limite $AC + BC = 1$.

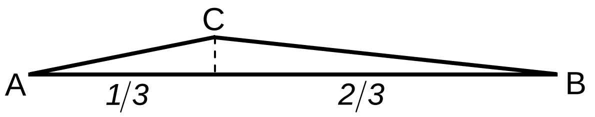
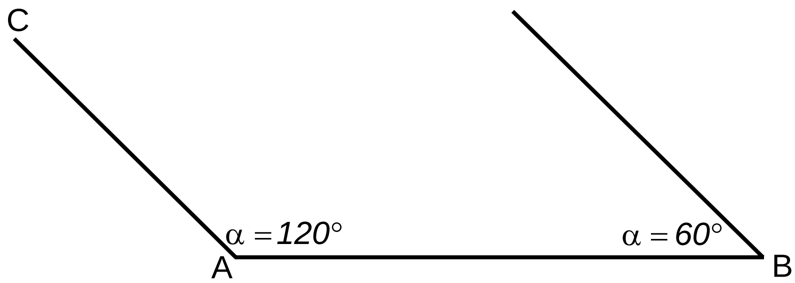
  Sostituendo in questa relazione il valore limite (*) si ottiene: $\dfrac{1}{2}BC + BC = 1$; $BC + 2BC = 2$;

  $3BC = 2$; $BC = 2/3 \;\Rightarrow\; AC = 1/3$ *e quindi:* $x = 1/3$.

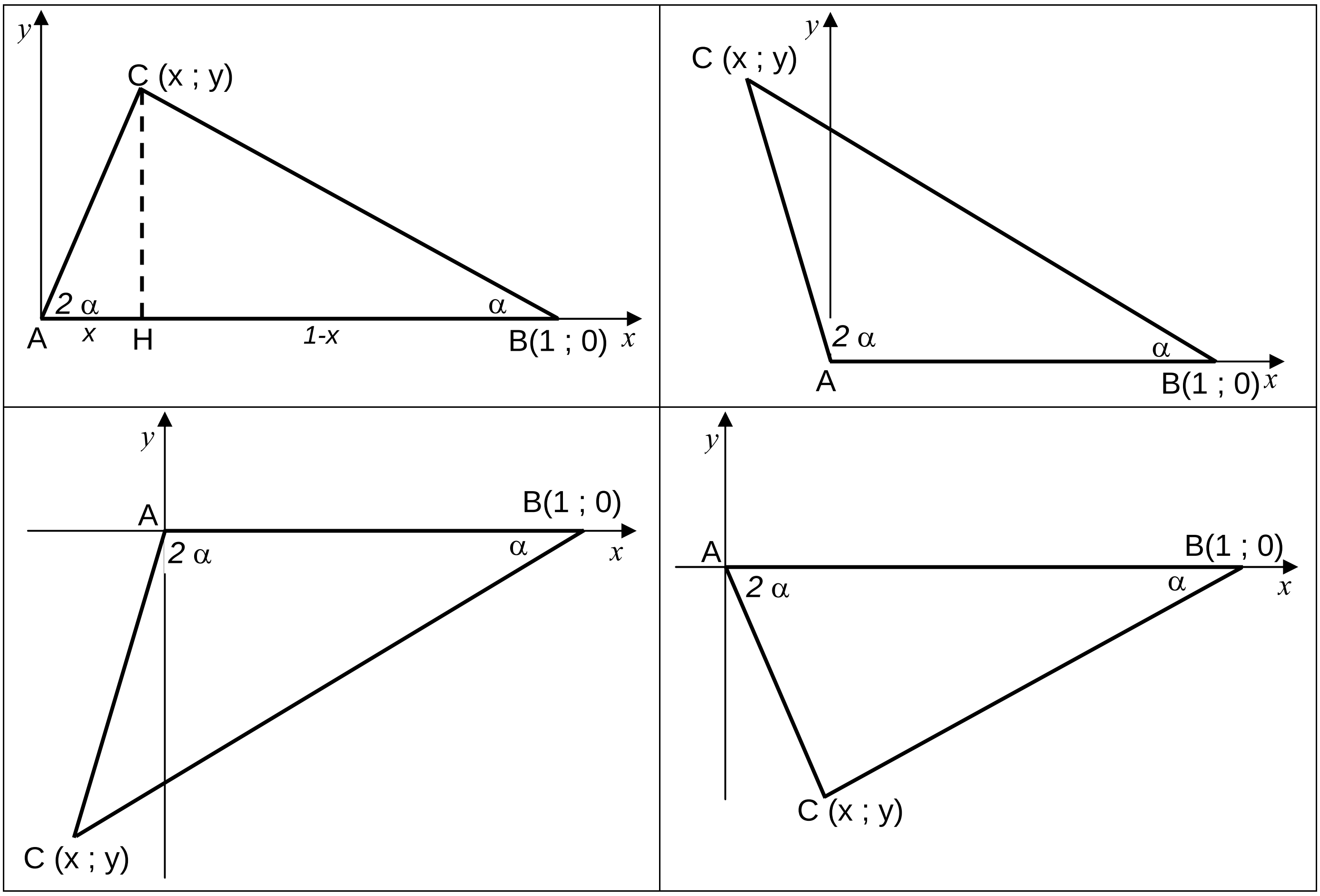
- Quando $\alpha \to \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x \to -\infty$

  infatti quando $\hat{ABC} \to 60°$, *l'angolo* $\hat{BAC} \to 120°$ *e l'angolo* $\hat{ACB} \to 0°$.
  Pertanto il triangolo non si chiude, (le rette AC e BC risultano parallele).
  In questa situazione limite $x_C \to -\infty$, *cioè* $x \to -\infty$.

In definitiva l'intervallo entro cui varia la variabile x è $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

Situazioni grafiche limiti	
Caso $\alpha \to \frac{\pi}{3}$	
Caso $\alpha \to 0$	

Per la variabile y non c'è nessuna limitazione poiché, come si evince dai grafici sottostanti, il vertice C può trovarsi in uno qualsiasi dei quattro quadranti.



II° Metodo

La rappresentazione grafica della curva di equazione: $1+3x^2-4x-y^2=0$ poteva ottenersi risolvendo l'equazione rispetto alla variabile $y=\pm\sqrt{3x^2-4x+1}$ e studiando il grafico delle funzioni:

$y=+\sqrt{3x^2-4x+1}$ e $y=-\sqrt{3x^2-4x+1}$.

Il grafico della funzione $y=+\sqrt{3x^2-4x+1}$ si ottiene, tenendo conto della limitazione geometrica $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$, dallo studio dei seguenti punti:

<u>Dominio:</u> $3x^2-4x+1\geq 0$; $3x^2-4x+1=0$; $x_1=\frac{1}{3};x_2=1$; $x\leq\frac{1}{3}\cup x\geq 1$; tenendo conto della limitazione geometrica, diventa: $C.E.=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

<u>Simmetrie:</u> La funzione, nel dominio $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$, non ha simmetrie di alcun genere.

<u>Intersezioni con gli assi:</u>

$$\begin{cases} y=+\sqrt{3x^2-4x+1} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=+\sqrt{3x^2-4x+1} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=3x^2-4x+1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1/3\,;x_2=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{3};0\right)$$

$$\begin{cases} y=+\sqrt{3x^2-4x+1} \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\sqrt{1} \\ x=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\,(0;1)$$

<u>Segno di *f(x)*:</u> La funzione è sempre positiva, essendo una funzione radice di indice pari.

<u>Asintoti verticali:</u> La funzione non ha asintoti verticali.

<u>Asintoti orizzontali:</u> La funzione non ha asintoti orizzontali. Infatti: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-4x+1}=+\infty+\infty=+\infty$

<u>Asintoti obliqui</u> $y=mx+q$ <u>:</u> La funzione ha l'asintoto obliquo a sinistra: $y=-\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$. Infatti:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-4x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{3}\,.$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{3x^2-4x+1}-\left(-\sqrt{3}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{3x^2-4x+1}+\sqrt{3}x\right]=+\infty-\infty=?$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{3x^2-4x+1}+\sqrt{3}x\right]\cdot\frac{\sqrt{3x^2-4x+1}-\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-4x+1}-\sqrt{3}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x+1-3x^2}{\sqrt{3x^2-4x+1}-\sqrt{3}x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{|x|\cdot\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+1}{-x\cdot\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\left(4-\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\left[\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

<u>Crescenza e decrescenza:</u>

$$f'(x) = \frac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+1}} = \frac{2\cdot(3x-2)}{2\sqrt{3x^2-4x+1}} = \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$$

$f'(x)=0$; $\frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}}=0$; $3x-2=0$; $x=\frac{2}{3}\notin C.E.$ e quindi non accettabile.

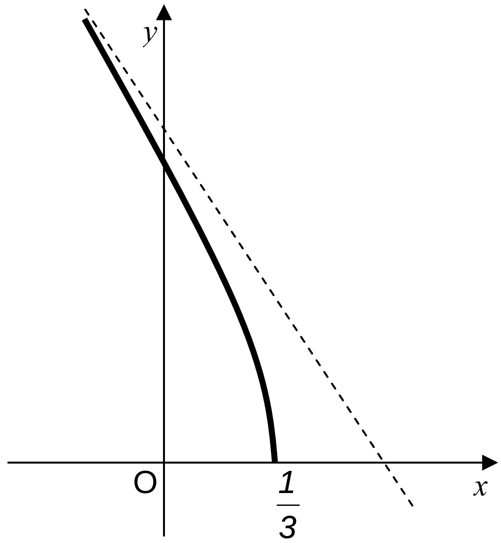
Pertanto la derivata prima non si annulla mai.

$f'(x)>0$; $\frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}}>0$; $3x-2>0$; $x>\frac{2}{3}$

$\notin C.E.$

Pertanto la derivata prima è sempre negativa in $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$,

quindi la funzione è strettamente decrescente in tutto l'intervallo $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.



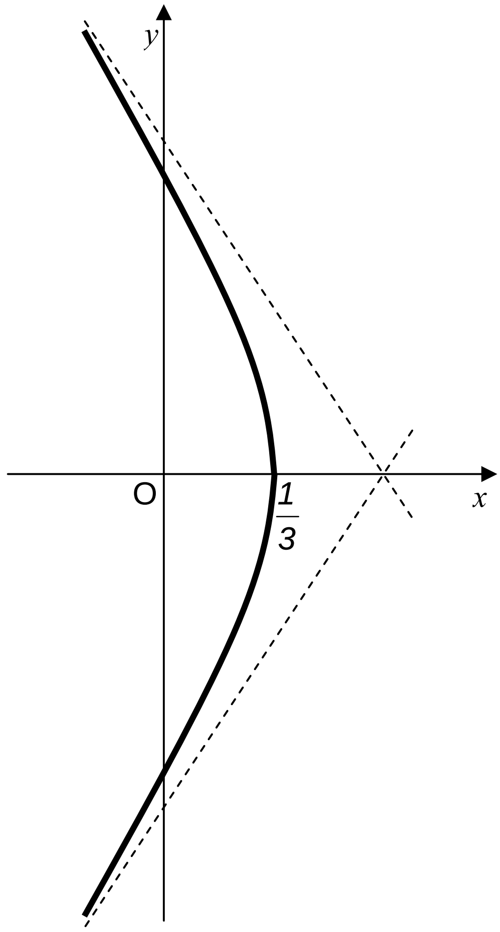
<u>Punti di non derivabilità:</u> La funzione non è derivabile in $x=\frac{1}{3}$,

infatti: $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\frac{3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+1}} = -\infty$

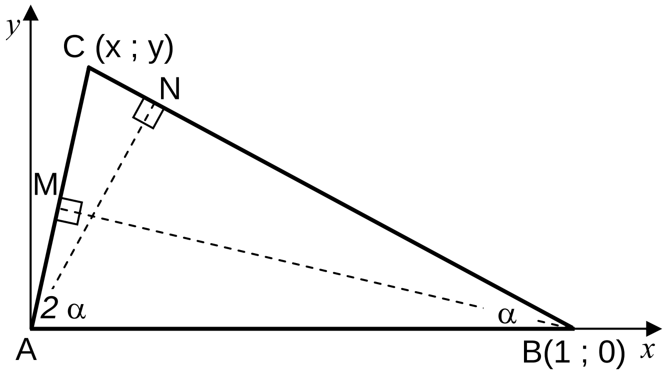
(Essendo $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\sqrt{3x^2-4x+1}=0^+$ $\quad\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}(3x-2)=-1$ *)*

Il grafico della funzione $y=-\sqrt{3x^2-4x+1}$ si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse y, il grafico appena studiato.

In definitiva la rappresentazione grafica del luogo geometrico: $1+3x^2-4x-y^2=0$ è quella a lato.



Punto 3



La funzione da massimizzare è $s(\alpha) = AN^2 + BM^2$

Dal triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABM}$ si ha: $sen\,2\alpha = \dfrac{BM}{AB}$

ed essendo $AB = 1$ si ottiene: $BM = sen\,2\alpha$

Dal triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABN}$ si ha: $sen\,\alpha = \dfrac{AN}{AB}$

ed essendo $AB = 1$ si ottiene: $AN = sen\,\alpha$

La funzione da massimizzare diventa pertanto: $s(\alpha) = sen^2 2\alpha + sen^2\alpha$; con $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{3}$.

Essa si trasforma in: $s(\alpha) = sen^2 2\alpha + sen^2\alpha \;=\; (2sen\,\alpha\cos\alpha)^2 + sen^2\alpha \;=$

$= \; 4sen^2\alpha\cos^2\alpha + sen^2\alpha \;=\; 4sen^2\alpha\cdot(1 - sen^2\alpha) + sen^2\alpha \;=\; 4sen^2\alpha - 4sen^4\alpha + sen^2\alpha \;=$

$= \; 5sen^2\alpha - 4sen^4\alpha$.

Occorre quindi trovare il valore di α per cui $s(\alpha) = 5sen^2\alpha - 4sen^4\alpha$ è massima in $\left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.

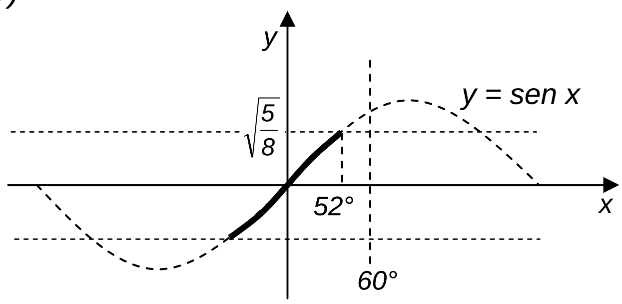
La derivata prima è: $s'(\alpha) = 10sen\,\alpha\cos\alpha - 16sen^3\alpha\cos\alpha \;=\; 2sen\,\alpha\cos\alpha\cdot(5 - 8sen^2\alpha)$

La derivata prima si annulla in: $s'(\alpha) = 0$; $2sen\,\alpha\cos\alpha\cdot(5 - 8sen^2\alpha) = 0$;

$sen\,\alpha = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \alpha = 0$

$\cos\alpha = 0 \qquad mai\ in\ (0, \pi/3) \qquad mai\ in\ (0, \pi/3)$

$5 - 8sen^2\alpha = 0 \qquad sen\,\alpha = \pm\sqrt{5/8} \qquad \alpha = 52°14'$



La derivata prima è positiva in: $s'(\alpha) > 0$;

$2sen\,\alpha\cos\alpha\cdot(5 - 8sen^2\alpha) > 0$;

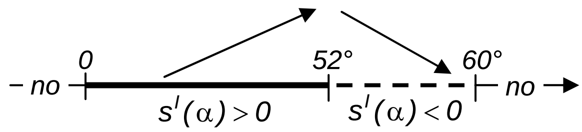
$sen\,\alpha > 0 \qquad \forall\alpha \in (0,\ \pi/3)$

$\cos\alpha > 0 \qquad \forall\alpha \in (0,\ \pi/3)$

$5 - 8sen^2\alpha > 0 \qquad 0 < \alpha < 52°14'$

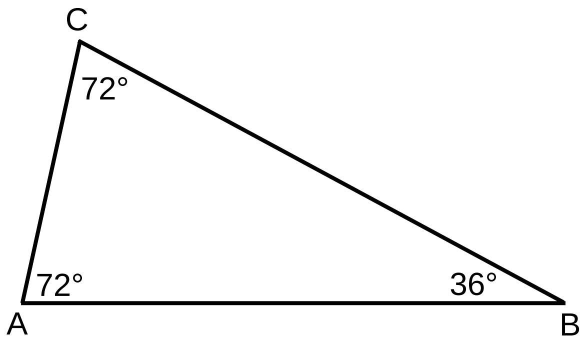
La derivata prima è positiva per: $0 < \alpha < 52°14'$

La derivata prima è negativa per: $52°14' < \alpha < 60°$



Concludendo la funzione $s(\alpha) = 5sen^2\alpha - 4sen^4\alpha$ è massima per $\alpha = 52°14'$.

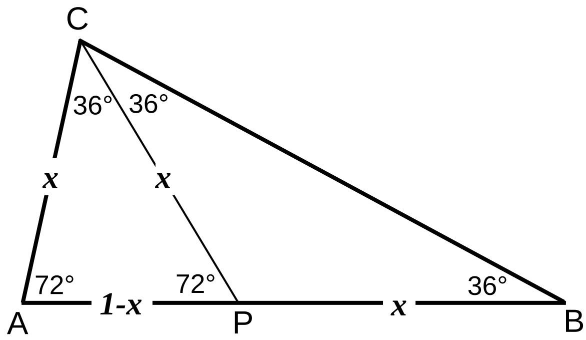
Punto 4



Se l'angolo $A\hat{B}C = 36° \Rightarrow B\hat{A}C = 72°$.

Inoltre anche l'angolo $B\hat{C}A = 72°$

perché: $B\hat{C}A = 180° - A\hat{B}C - B\hat{A}C$



Sia CP la bisettrice dell'angolo $B\hat{C}A = 72°$.

L'angolo $A\hat{P}C = 72°$

I triangoli $A\overset{\Delta}{B}C$, $B\overset{\Delta}{C}P$ e $A\overset{\Delta}{C}P$ sono isosceli.

Pertando, ponendo $PB = x$ si ha:
$CP = x$, $AC = x$ e $AP = 1 - x$

Dalla similitudine dei triangoli isosceli $A\overset{\Delta}{B}C$ e $A\overset{\Delta}{C}P$ si ha:
$AB : AC = AC : AP$; $1 : x = x : (1 - x)$; $x^2 = 1 - x$; $x^2 + x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 & \textit{non accettabile} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 & \textit{accettabile} \end{cases}$$