ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: ________________

CORSO SPERIMENTALE

Sessione suppletiva 2006

Tema di ______________________

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p’ e p” di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l’altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V’ il vertice della parabola p’, con V” il vertice della parabola p” e con P il punto in cui p” interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l’area della regione finita di piano delimitata dall’arco V’V” della parabola p’, dall’arco V”P della parabola p” e dal segmento V’P.
c) Calcolare l’ampiezza dell’angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l’uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Le due parabole p’ e p” sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un’isometria che trasforma una di esse nell’altra e trovando le equazioni di tale isometria.
e) Stabilire se l’isometria trovata ammette elementi uniti.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x+27y-9=0$.
c) Disegnare l’andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l’equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell’ulteriore punto B che t ha in comune con γ.
d) Trovare l’equazione della circonferenza di diametro AB.
e) Calcolare l’area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall’asse x.

QUESTIONARIO

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto V'/V".

2. Il numero delle soluzioni dell'equazione sen2x cos x =2 nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è $+\infty$; [C] è 0; [D] è un valore finito diverso da 0.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Dimostrare che la funzione $f(x)=x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5. Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy:

Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b], è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6. Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

8. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

10. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Riguarda:

- **indirizzo Scientifico, Corso sperimentale PNI, materia Matematica**
- **indirizzo Opzione scientifica tecnologica, Internazionale europeo, materia Matematica Informatica**