ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2006

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

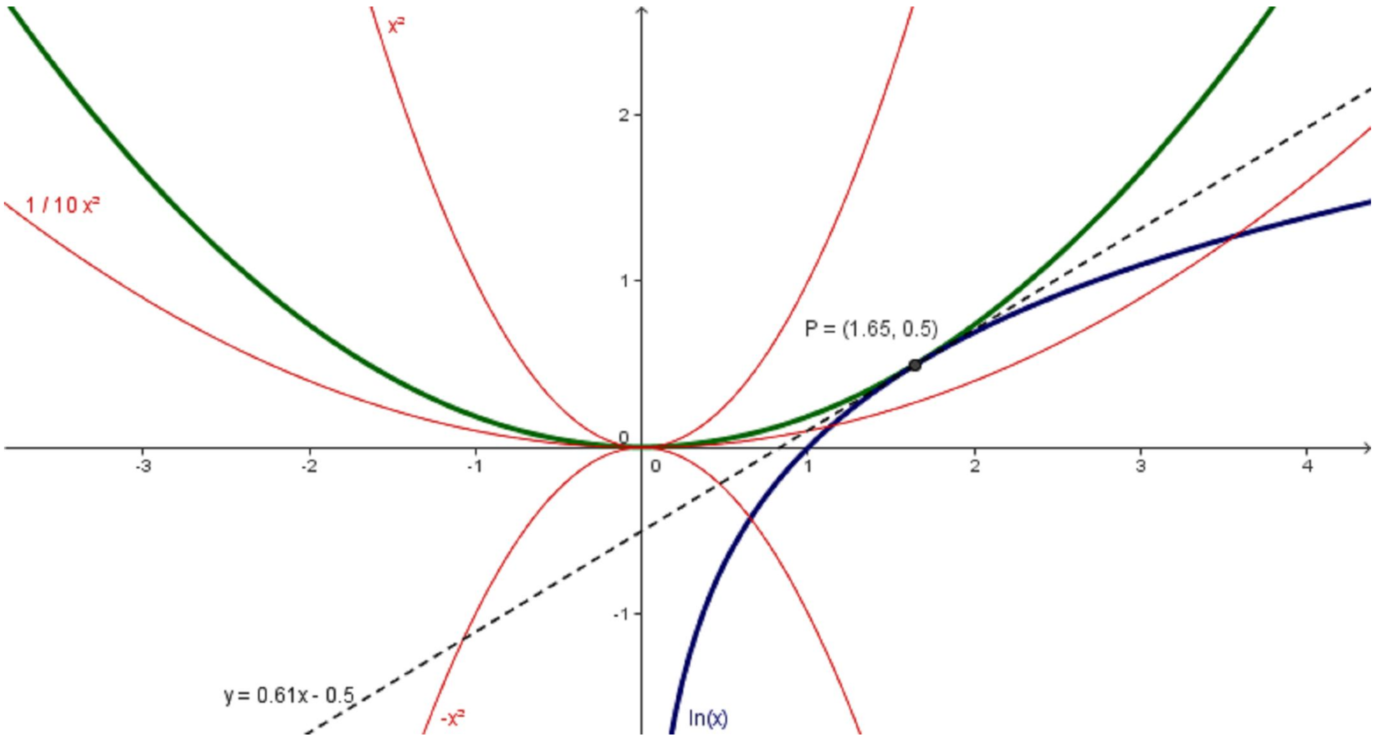
Problema 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. *Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.*
2. *Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.*
3. *Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.*

Punto 1

La funzione $f(x) = \log x$ è la funzione logaritmica avente base e strettamente crescente nel suo dominio $(0,+\infty)$.
L'equazione $g(x) = ax^2$ rappresenta una famiglia di parabole con vertice nell'origine e asse di simmetria l'asse y.



Per $a > 0$ le parabole volgono la concavità verso l'alto;

Per $a < 0$ le parabole volgono la concavità verso il basso;

Per $a = 0$ la parabola degenera nella retta di equazione $y = 0$ (asse x).

Al variare del parametro a il numero delle intersezioni può essere due, una o nessuna.

Dal grafico si deduce che per $a \le 0$ c'è una sola intersezione tra la parabola e la curva logaritmica.

I grafici di f e g sono tra loro tangenti quando, nel punto di tangenza $P_0(x_0;y_0)$, hanno la stessa retta tangente.

Cioè quando le due rette tangenti: $y-\log x_0 = m_{t1}\cdot(x-x_0)$ e $y-ax_0^2 = m_{t2}\cdot(x-x_0)$ coincidono.

Vale a dire che: $\begin{cases} m_{t1}=m_{t2} \\ \log x_0 = ax_0^2 \end{cases}$

Essendo: $f^I(x)=\dfrac{1}{x}$ e $g^I(x)=2ax$ si ha: $\begin{cases} 2ax_0 = \dfrac{1}{x_0} \\ \log x_0 = ax_0^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2ax_0^2 = 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x_0^2 = \dfrac{1}{2a} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \left\langle \begin{array}{ll} -\dfrac{1}{\sqrt{2a}} & \text{non accettabile} \\ +\dfrac{1}{\sqrt{2a}} & \text{accettabile} \end{array}\right. \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} \\ \log\dfrac{1}{\sqrt{2a}} = a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \log\dfrac{1}{\sqrt{2a}} = a\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ \log\dfrac{1}{\sqrt{2a}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \log 1 - \log\sqrt{2a} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 0 - \dfrac{1}{2}\log 2a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \log 2a = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2a = e^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\dfrac{1}{2e}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{e}}} = \sqrt{e} \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = \sqrt{e} \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

L'ordinata del punto di tangenza è: $y_0 = \log\sqrt{e} = \dfrac{1}{2}\log e = \dfrac{1}{2}$.

Pertanto la retta tangente ad entrambe le curve ha equazione: $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}x - \dfrac{1}{2}$.

Infatti: $f^I(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow m_t = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Quindi si ha: $y-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}x - 1 + \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}x - \dfrac{1}{2}$.

Ricordando che al crescere del parametro a, la parabola si restringe, si deduce che :

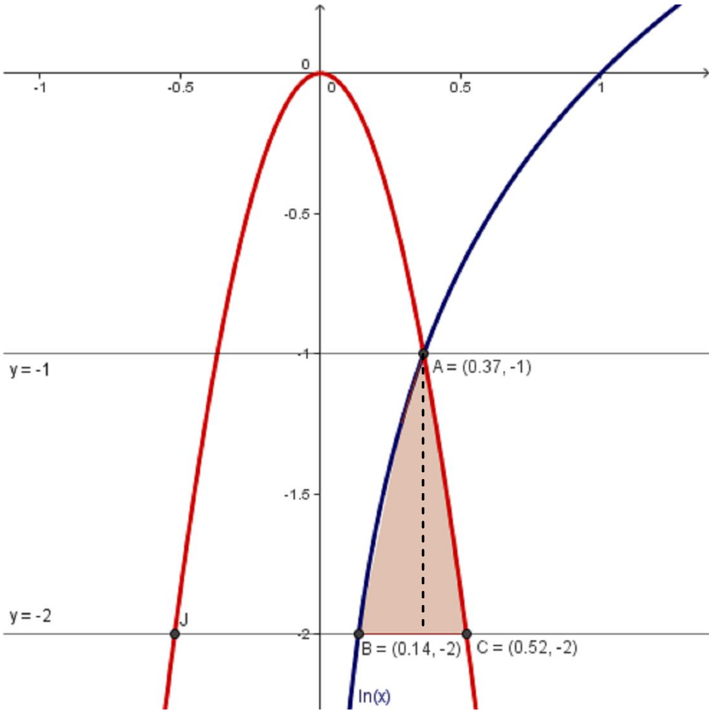
per $a \le 0$ c'è una sola intersezione tra la parabola e la curva logaritmica;.

per $0 < a < \dfrac{1}{2e}$ ci sono due intersezioni distinte tra la parabola e la curva logaritmica;

per $a = \dfrac{1}{2e}$ ci sono due intersezioni coincidenti tra la parabola e la curva logaritmica (le curve sono tra loro tangenti);

per $a > \dfrac{1}{2e}$ non ci sono intersezioni tra la parabola e la curva logaritmica.

Punto 2 – metodo 1



Ponendo $a = -e^2$ *nel fascio* $g(x) = ax^2$ *si ottiene la parabola:* $g(x) = -e^2 x^2$.

I grafici delle due funzioni: $y = \log x$ *e* $y = -e^2 x^2$ *sono rappresentate a lato.*

Essendo il dominio normale rispetto all'asse y, *conviene considerare le funzioni inverse di* $f(x)$ *e di* $g(x)$, (funzioni biunivoche per $x > 0$).

Esse per $x > 0$, *sono:* $x = e^y$ *e* $x = \frac{1}{e}\sqrt{-y}$.

L'area del Dominio è data da:

$$S = \int_{-2}^{-1} \left[\frac{1}{e}\sqrt{-y} - e^y \right] dy$$

L'integrale indefinito vale:

$$\int \left[\frac{1}{e}\sqrt{-y} - e^y \right] dy = \frac{1}{e}\int \sqrt{-y}\,dy - \int e^y dy = \frac{1}{e}\int (-y)^{\frac{1}{2}} dy - \int e^y dy = -\frac{1}{e}\int (-y)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) dy - \int e^y dy =$$

$$= -\frac{1}{e} \cdot \frac{(-y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - e^y + k = -\frac{1}{e} \cdot \frac{(-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - e^y + k = -\frac{2}{3e} \cdot (-y)^{\frac{3}{2}} - e^y + k .$$

L'area del Dominio vale pertanto:

$$S = \int_{-2}^{-1} \left[\frac{1}{e}\sqrt{-y} - e^y \right] dy = \left[-\frac{2}{3e} \cdot (-y)^{\frac{3}{2}} - e^y \right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{2}{3e} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - e^{-1} - \left(-\frac{2}{3e} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - e^{-2} \right) \right] =$$

$$= \left[-\frac{2}{3e} - \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{e^2} \right] = \left[\frac{-2-3}{3e} + \frac{2}{3e} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{e^2} \right] = \left[-\frac{5}{3e} + \frac{2\sqrt{8}}{3e} + \frac{1}{e^2} \right] = \left[-\frac{5}{3e} + \frac{4\sqrt{2}}{3e} + \frac{1}{e^2} \right] =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 5}{3e} + \frac{1}{e^2} \approx 0{,}216 .$$

Punto 2 – metodo 2

Determiniamo innanzitutto i punti di intersezione delle curve $y = \log x$ *e* $y = -e^2x^2$ *con le rette* $y = -1$ *e* $y = -2$.

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = -e^2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -1 = -e^2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 = \dfrac{1}{e^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = \begin{cases} -\dfrac{1}{e} & \text{non accettabile} \\ +\dfrac{1}{e} & \text{accettabile} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{e};-1\right)$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ y = -e^2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -2 = -e^2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 = \dfrac{2}{e^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{e} & \text{non accettabile} \\ +\dfrac{\sqrt{2}}{e} & \text{accettabile} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{2}}{e};-2\right)$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = \log_e x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -1 = \log_e x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{e};-1\right)$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ y = \log_e x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -2 = \log_e x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{e^2};-2\right)$$

Pertanto le due curve $y = \log x$ *e* $y = -e^2x^2$ *si intersecano nel punto* $A\left(\frac{1}{e};-1\right)$.

Ricordando che: $\int \log x\,dx = \int 1 \cdot \log x\,dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \log x - x + k$.

L'area del Dominio è data da:

$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} [\log x - (-2)]\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{\sqrt{2}}{e}} \left[-e^2x^2 - (-2)\right]dx = [x\log x - x + 2x]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} + \left[-e^2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{\sqrt{2}}{e}} =$$

$$= [x\log x + x]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} + \left[-e^2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{\sqrt{2}}{e}} =$$

$$= \left[\frac{1}{e} \cdot \log\frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e^2} \cdot \log\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2}\right)\right] + \left[-e^2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{3e^3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{e} - \left(-e^2 \cdot \frac{1}{3e^3} + 2 \cdot \frac{1}{e}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{e} \cdot (\log 1 - \log e) + \frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e^2} \cdot \left(\log 1 - \log e^2\right) + \frac{1}{e^2}\right)\right] + \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3e} + \frac{2\sqrt{2}}{e} - \left(-\frac{1}{3e} + \frac{2}{e}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{e} \cdot (-1) + \frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e^2} \cdot (-2) + \frac{1}{e^2}\right)\right] + \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3e} + \frac{2\sqrt{2}}{e} + \frac{1}{3e} - \frac{2}{e}\right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \left(-\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2}\right)\right] + \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3e} + \frac{2\sqrt{2}}{e} + \frac{1}{3e} - \frac{2}{e}\right] =$$

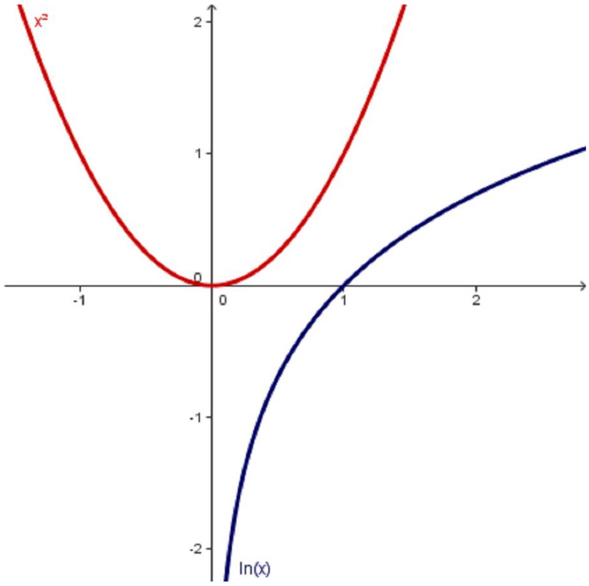
$$= \left[-\left(-\frac{1}{e^2}\right)\right] + \left[\frac{-2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 1 - 6}{3e}\right] = \frac{1}{e^2} + \frac{4\sqrt{2} - 5}{3e} \approx 0{,}216 .$$

Punto 3

Dovendo studiare la funzione $h(x) = \log x - ax^2$, *scegliendo per* a *un valore numerico maggiore di* $\frac{1}{2e}$,

ed essendo $\frac{1}{2e} < 1$, *conviene, per semplificare i calcoli, scegliere* $a = 1$.

Pertanto la funzione da studiare è: $\boxed{h(x) = \log x - x^2}$



1. Dominio

Il dominio è: $Dom(h) = (0, +\infty)$

2. Simmetrie

La curva non presenta simmetrie evidenti.

3. Intersezioni con gli assi

La funzione non tocca alcun asse cartesiano.
Infatti, essendo $Dom(h) = (0, +\infty)$, *la funzione non tocca l'asse* y
Non tocca neanche l'asse x, *perché, per quanto studiato al punto 1, l'equazione* $\log x = x^2$ *non ha alcuna soluzione*

$$\begin{cases} y = \log x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log x - x^2 = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} \log x = x^2 \quad n.s.r. \\ - \end{cases}$$

4. Segno di h(x)

$h(x) > 0$; $\quad \log x - x^2 > 0$; $\quad \log x > x^2$.
Dall'esame del grafico si ricava che la disequazione non è mai verificata. Pertanto la funzione è sempre negativa.

5. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\log x - x^2\right) = -\infty \quad \Rightarrow$$ *la retta* $x = 0$ *è un asintoto verticale destro della funzione.*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\log x - x^2\right) = \left(+\infty - \infty = ?\right)$$ *eliminiamo la forma di indeterminazione raccogliendo* $\log x$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\log x - x^2\right) = \lim_{x \to +\infty} \log x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\log x}\right) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$ *che non esiste l'asintoto orizzontale.*

Infatti: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x - x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\log x}{x} - \frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\log x}{x} - x\right] = -\infty$$

Infatti: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

6. Derivata prima

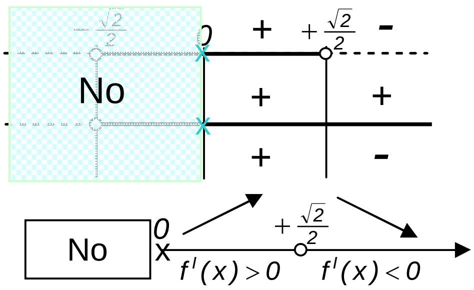
$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x$$

7. Zeri della derivata prima

$$h'(x) = 0\,; \quad \frac{1}{x} - 2x = 0\,; \quad 1 - 2x^2 = 0\,; \quad x^2 = \frac{1}{2}\,; \quad x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \textit{non accettabile} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} & \textit{accettabile} \end{cases}$$

8. <u>Segno della derivata prima</u>

$$h(x)>0\,;\quad \frac{1}{x}-2x>0\,;\quad \frac{1-2x^2}{x}>0\,;\quad \begin{array}{l} 1-2x^2>0 \\ x>0 \end{array}\quad \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x>0 \end{array}$$



Pertanto in $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$ c'è un punto di max relativo.

L'ordinata del punto di max è: $\approx -0{,}85$.

Infatti: $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\log\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\approx -0{,}85$.

9. <u>Derivata seconda</u>

$$h''(x)=-\frac{1}{x^2}-2=\frac{-1-2x^2}{x^2}=-\frac{1+2x^2}{x^2}$$

10. <u>Zeri della derivata seconda</u>

$h''(x)=0\,;\quad -\frac{1+2x^2}{x^2}=0\,;\quad 1+2x^2=0$ mai. Pertanto non ci sono flessi.

11. <u>Segno della derivata seconda</u>

$h''(x)>0\,;\quad -\frac{1+2x^2}{x^2}>0\,;$ non è mai verificata. Pertanto la curva volge sempre la concavità verso il basso.

12. <u>Massimi e minimi assoluti</u>

La funzione è limitata superiormente ma non è limitata inferiormente.

Il punto $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \log\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$ è un punto di massimo assoluto.

Il codominio della funzione è: $I_f=\left(-\infty,\log\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right]$

13. <u>Grafico</u>

Il grafico è tracciato a lato.