

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo: Scientifico

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione suppletiva 2006

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

- Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
- Indicato con V' il vertice della parabola p' , con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y , calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p' , dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
- Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
- Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y=4$ e dalla parabola p' , inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.
- Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

PROBLEMA 2.

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

- Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
- Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x+27y-9=0$.
- Disegnare l'andamento di γ , dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ .
- Determinare l'equazione della circonferenza c , tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y .
- Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c .

QUESTIONARIO.

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V'' . Determinare il rapporto V'/V'' .
2. Il numero delle soluzioni dell'equazione $\sin 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:
 [A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
3. Il limite della funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, per $x \rightarrow 0$:
 [A] non esiste; [B] è 0; [C] è un valore finito diverso da 0; [D] è $+\infty$.
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
4. Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.
5. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".
6. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.
7. Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M , esiste un numero reale N tale che, per ogni x , se $x > N$ allora $f(x) > M$.
 È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.
8. È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L . Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n -esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$ -esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞ .
9. Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
10. Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia "1", posta a capotavola, è riservata al ragazzo "1", che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.