

CATEGORIA C1 Problemi 1-2-3-4-5-6-7-8

CATEGORIA C2 Problemi 5-6-7-8-9-10-11-12

CATEGORIA L1 Problemi 9-10-11-12-13-14-15-16

CATEGORIA L2 Problemi 11-12-13-14-15-16-17-18

1 Date e somme

Considerate la data del 31.12.2014: la somma delle sue cifre è uguale a 14 ($3+1+1+2+2+0+1+4 = 14$).

Qual è la prima data successiva per cui la somma delle cifre è uguale a 20?

2 Spiccioli

Chiara ha acquistato un quaderno che costa 2,70 Euro. Nel suo borsellino, ha 6 pezzi da 0,50 Euro e 12 pezzi da 20 centesimi. Deve stare attenta a come paga perché il cartolaio non ha nessuna moneta da darle di resto.

In quanti modi diversi può pagare la cifra esatta di 2,70 Euro?

3 Il puzzle

Collocate nella parte ancora bianca della scacchiera i quattro pezzi attualmente alla sua destra, in modo da ricoprire completamente la scacchiera.



4 Un "5" magico

Collocate tutti i numeri 2, 6, 7, 8, 9, 10, 12 e 14 nelle caselle ancora vuote del "5" della figura, in modo che i numeri scritti in ognuna delle tre righe (orizzontali) di quattro caselle e in ognuna delle due colonne (verticali) di tre caselle abbiano sempre per somma 27.

	4	5	
	1	11	
	3	13	

5 Un triangolo medio

Completate le caselle ancora vuote del triangolo della figura, sapendo che il numero di ogni casella (a partire dal piano più alto) deve essere la media aritmetica dei numeri delle due caselle sottostanti su cui si appoggia.



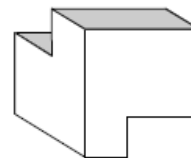
6 Le arance

Per sistemare le arance da mettere in vetrina e da vendere, il fruttivendolo Renato ha a sua disposizione dei vassoi che contengono 12 arance oppure altri vassoi più grandi che ne contengono 21. Sia che usi sempre i contenitori piccoli, sia che usi sempre quelli grandi, riempiendoli completamente, alla fine gli rimane fuori 1 arancia.

Le arance che Renato vuole vendere sono meno di 100, ma quante sono esattamente?

7 Le facce del solido

In figura vedete un solido che, quando è poggiato su un tavolo, ha tutte le sue facce (piane) orizzontali o verticali.

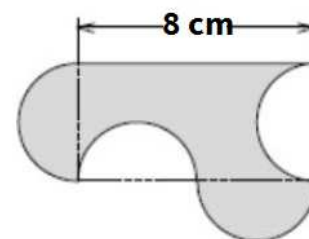


Quante facce ha, al minimo, questo solido?

8 Un nuovo puzzle

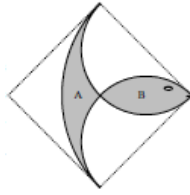
Per terra, nella sua camera, Jacob ha trovato il pezzo di un puzzle che vedete in figura.

Qual è la sua area, sapendo che tutti gli archi di circonferenza sono delle semicirconferenze che hanno lo stesso raggio?



9 L'artista

Liliana ha disegnato un pesce esotico tracciando, all'interno di un quadrato, un quarto di una circonferenza il cui raggio misura 10 cm e due semicirconferenze che hanno entrambe il raggio di 5 cm.



Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- 1) L'area della parte A è maggiore dell'area della parte B.
- 2) L'area della parte A è minore dell'area della parte B.
- 3) Le aree di A e B sono uguali.
- 4) Le informazioni date non ci permettono di dare una risposta (al confronto tra le aree di A e B).

10 Lettere cifrate

Sostituite al posto delle lettere delle cifre in modo che l'operazione:

$$\begin{array}{r} \text{CINQ} + \\ \text{UE} = \\ \hline 2015 \end{array}$$

sia corretta e che alla parola CINQUE corrisponda il valore numerico più grande possibile.

(Nessun numero può cominciare con 0 e, al posto di lettere diverse, vanno inserite cifre diverse).

11 Il multiplo dell'anno prossimo

Mettete i cinque gettoni in un ordine tale per cui compaia un numero di cinque cifre che sia multiplo di 2015.



12 Una piramide tennistica

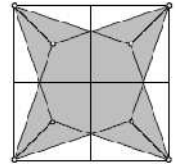
Per decorare la vetrina del suo negozio di articoli sportivi, Nando ha costruito la piramide che vedete e che è formata da 385 palline da tennis. Ciascun livello della costruzione è un quadrato. Il livello più alto è formato da 1 sola pallina. Quello sottostante da 4 palline, quello ancora sottostante da 9 ecc. ecc. .



Quanti piani ha la piramide?

13 La stella

Il quadrato grande ha un'area di 3045 cm^2 . Guardate al suo interno la stella (più scura): è stata costruita congiungendo i vertici del quadrato grande con i centri dei quadrati più piccoli.



Qual è l'area della stella?

14 Senza 5 e senza 7

Quanti sono i numeri interi, compresi tra 1 e 100.000 (inclusi), che si scrivono senza utilizzare né la cifra 5 né la cifra 7?

15 In progressione

I primi tre termini della progressione geometrica scritta da Jacopo sono: $a, a+6, a+30$.

Quale sarà il quarto termine della progressione di Jacopo?

(Ricordiamo che i termini a_1, a_2, \dots, a_n costituiscono una progressione geometrica quando è sempre uguale (costante) il rapporto tra ogni termine e il precedente).

16 Radici, che passione!

Nell'equazione $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$, le incognite a e b sono numeri interi non negativi.

Quante coppie di soluzioni ha l'equazione?

17 La decrescita

Qual è il più piccolo multiplo non nullo di 2015, le cui cifre sono scritte in ordine decrescente (non necessariamente in senso stretto) da sinistra a destra?

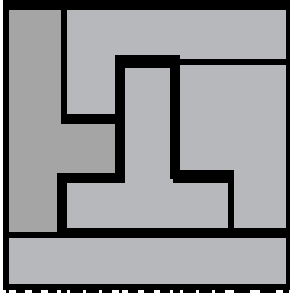
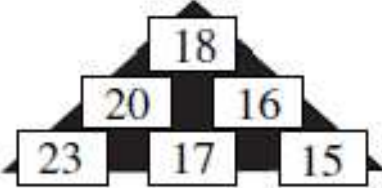
18 Gioco di mani

A turno, Carla e Milena mostrano alcune dita di una mano (una o due o tre o quattro o cinque dita). Il numero delle dita indicate si va ad aggiungere al totale precedente ma la nuova somma così ottenuta deve essere un numero primo. Per esempio, se Carla ha indicato due dita, Milena può rispondere con un dito o tre dita oppure anche con cinque dita perché $2+1=3$, $2+3=5$ e $2+5=7$ sono numeri primi. La prima (tra Carla e Milena) che, con il numero delle sue dita sommato al totale precedente, non riesce a ottenere un numero primo perde.

È Milena che comincia il gioco (in questo momento il totale è dunque 0).

Quante dita deve mostrare per essere sicura di vincere, se gioca al meglio, qualunque siano le risposte successive di Carla?

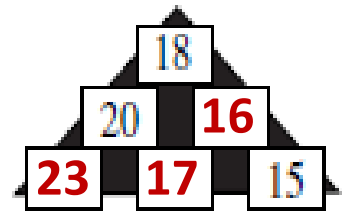
Soluzioni

1	La data è 29/1/2015																				
2	Chiara può pagare in 3 modi																				
3																					
4	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">12</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">8</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">13</td> <td style="text-align: center;">9</td> </tr> </table>	6	5	4	12	14				7	1	11	8				10	2	3	13	9
6	5	4	12																		
14																					
7	1	11	8																		
			10																		
2	3	13	9																		
5																					
6	Le arance di Renato sono 85																				
7	Al minimo le facce sono 10																				
8	L'area è 32 cm ²																				
9	L'affermazione vera è 3																				
10	CINQUE= 198530																				
11	Il numero è 44330																				
12	La piramide ha 10 piani																				
13	L'area della stella è 2030 cm ²																				
14	I numeri sono 32768																				
15	Il numero successivo è 128 anche a+126																				
16	Ci sono 9 soluzioni																				
17	Il più piccolo multiplo è 44330																				
18	Milena deve mostrare 5 dita																				

Soluzioni

5 Un triangolo medio

Completate le caselle ancora vuote del triangolo della figura, sapendo che il numero di ogni casella (a partire dal piano più alto) deve essere la media aritmetica dei numeri delle due caselle sottostanti su cui si appoggia.



6 Le arance

Per sistemare le arance da mettere in vetrina e da vendere, il fruttivendolo Renato ha a sua disposizione dei vassoi che contengono 12 arance oppure altri vassoi più grandi che ne contengono 21. Sia che usi sempre i contenitori piccoli, sia che usi sempre quelli grandi, riempiendoli completamente, alla fine gli rimane fuori 1 arancia.

Le arance che Renato vuole vendere sono meno di 100, ma quante sono esattamente?

Soluzione

$$m. c. m. (12 ; 21) + 1 = 84 + 1 = 85$$

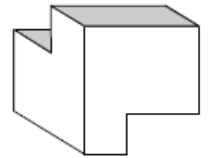
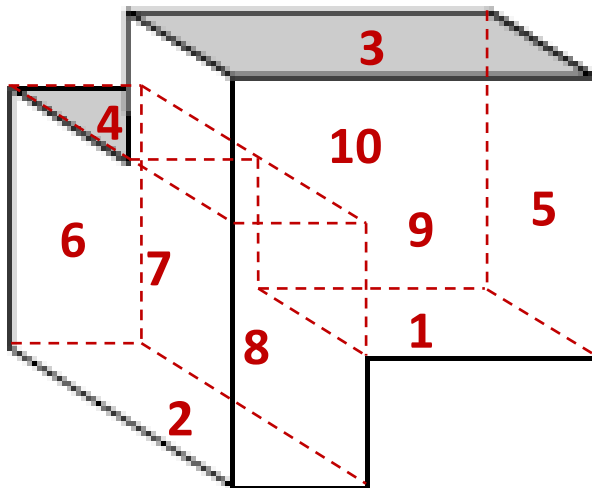
7 Le facce del solido

In figura vedete un solido che, quando è poggiato su un tavolo, ha tutte le sue facce (piane) orizzontali o verticali.

Quante facce ha, al minimo, questo solido?

Soluzione

Le facce al minimo sono 10



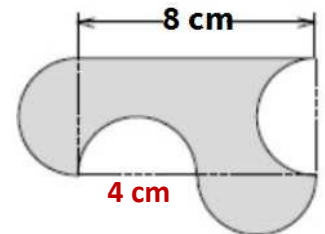
8 Un nuovo puzzle

Per terra, nella sua camera, Jacob ha trovato il pezzo di un puzzle che vedete in figura.

Qual è la sua area, sapendo che tutti gli archi di circonferenza sono delle semicirconferenze che hanno lo stesso raggio?

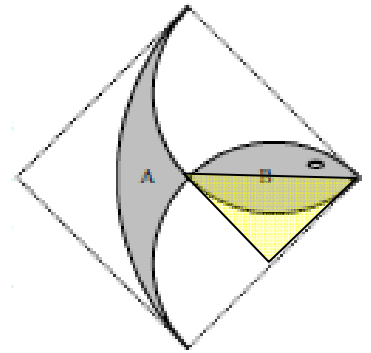
Soluzione

$$L'area del puzzle è $S = (8 \cdot 4) \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$$$



9 L'artista

Liliana ha disegnato un pesce esotico tracciando, all'interno di un quadrato, un quarto di una circonferenza il cui raggio misura 10 cm e due semicirconferenze che hanno entrambe il raggio di 5 cm.



Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- 5) L'area della parte A è maggiore dell'area della parte B.
- 6) L'area della parte A è minore dell'area della parte B.
- 7) Le aree di A e B sono uguali.
- 8) Le informazioni date non ci permettono di dare una risposta (al confronto tra le aree di A e B).

Soluzione

$$B = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} 5 \cdot 5 \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \pi \cdot 25 - \frac{1}{2} 25 \right) = \frac{25}{2} \pi - 25$$

$$A = \frac{1}{4} \pi \cdot 10^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 + B = 25 \pi - 25 \pi + B = B$$

10 Lettere cifrate

Sostituite al posto delle lettere delle cifre in modo che l'operazione:

$$\begin{array}{r} \text{CINQ} + \\ \text{UE} = \\ \hline 2015 \end{array}$$

sia corretta e che alla parola CINQUE corrisponda il valore numerico più grande possibile.

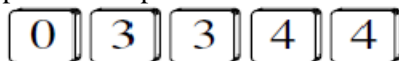
(Nessun numero può cominciare con 0 e, al posto di lettere diverse, vanno inserite cifre diverse).

Soluzione

$$\begin{array}{r} 1985 + \\ 30 = \\ \hline 2015 \end{array}$$

11 Il multiplo dell'anno prossimo

Mettete i cinque gettoni in un ordine tale per cui compaia un numero di cinque cifre che sia multiplo di 2015.



Soluzione

Il numero 2015 si scompone in: $2015 = 13 \cdot 31 \cdot 5$.

Quindi il numero da trovare deve terminare per 0 o per 5. Siccome 5 non figura nella lista, deve terminare per zero.

Stabilito ciò, resta da verificare quale delle seguenti cinquine è un multiplo di 2015.

3	3	4	4	0
3	4	3	4	0
3	4	4	3	0

4	4	3	3	0
4	3	4	3	0
4	3	3	4	0

La cinquina soluzione è: **4 4 3 3 0**

12 Una piramide tennistica

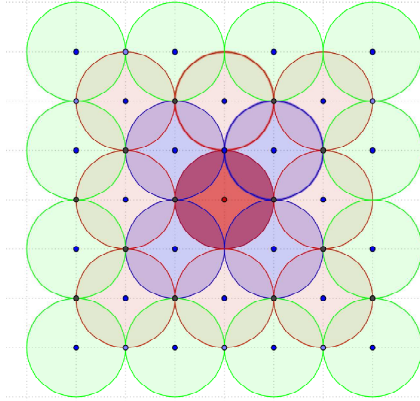
Per decorare la vetrina del suo negozio di articoli sportivi, Nando ha costruito la piramide che vedete e che è formata da 385 palline da tennis. Ciascun livello della costruzione è un quadrato. Il livello più alto è formato da 1 sola pallina. Quello sottostante da 4 palline, quello ancora sottostante da 9 ecc. ecc. .



Quanti piani ha la piramide?

Soluzione

La successione del numero di palline per piano è: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...



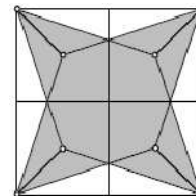
<i>Piano = n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Palline per piano = n²</i>	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Somma palline	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Pertanto la piramide ha 10 piani.

13 La stella

Il quadrato grande ha un'area di 3045 cm^2 . Guardate al suo interno la stella (più scura): è stata costruita congiungendo i vertici del quadrato grande con i centri dei quadrati più piccoli.

Qual è l'area della stella?



Soluzione

Nel triangolo rettangolo DMO, essendo $\overline{DO} = 2 \overline{MO}$,
per il teorema della bisettrice $\overline{DN} = 2 \overline{MN}$

Considerando i due triangoli simili DEN e DIM si ha:

$$\overline{DM} : \overline{DN} = \overline{IM} : \overline{EN}$$

$$\overline{EN} = \frac{\overline{DN} \cdot \overline{IM}}{\overline{DM}} = \frac{2 \overline{MN} \cdot \overline{IM}}{3 \overline{MN}} = \frac{2}{3} \overline{IM}$$

Essendo $\overline{IM} = \frac{1}{2} \overline{EO}$ si ha:

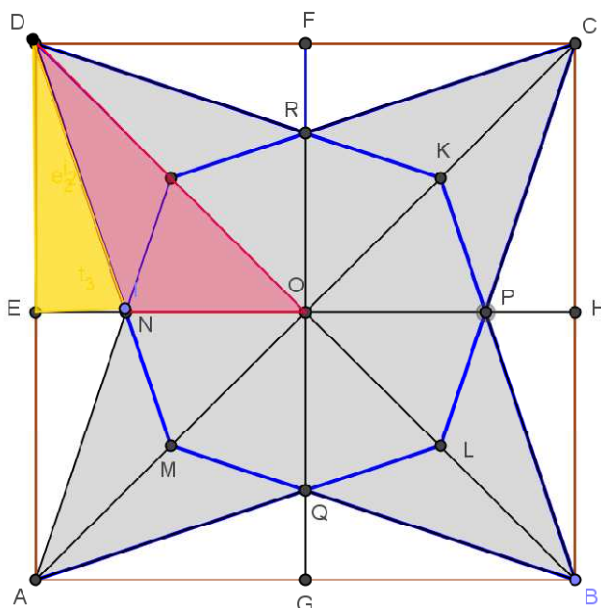
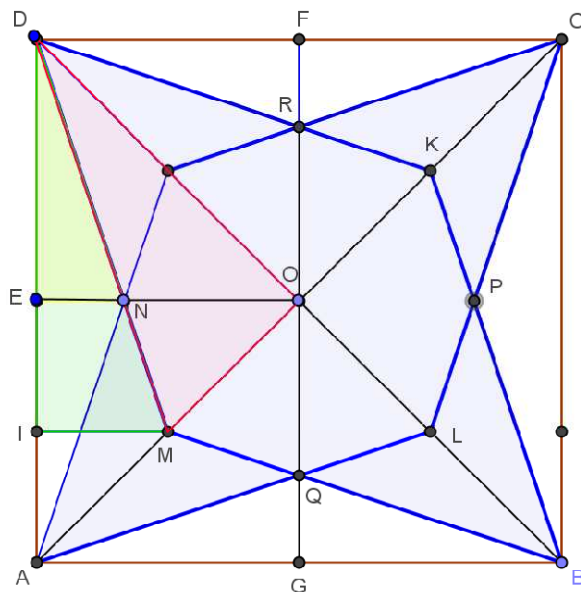
$$\overline{EN} = \frac{2}{3} \overline{IM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overline{EO} = \frac{1}{3} \overline{EO}$$

Considerando poi i triangoli DEN e DEO, si osserva che essi hanno la stessa altezza DE, mentre la base $\overline{EN} = \frac{1}{3} \overline{EO}$, quindi l'area $S_{DEN} = \frac{1}{3} S_{DEO}$.

Per la simmetria dei triangoli che compongono la stella, l'area bianca del quadrato è $\frac{1}{3}$ dell'area del quadrato grande.

Pertanto l'area della stella è $\frac{2}{3}$ dell'area del quadrato grande

$$S_{Stella} = \frac{2}{3} \cdot 3045 \text{ cm}^2 = 2030 \text{ cm}^2.$$



14 Senza 5 e senza 7

Quanti sono i numeri interi, compresi tra 1 e 100.000 (inclusi), che si scrivono senza utilizzare né la cifra 5 né la cifra 7?

Soluzione

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

201									210
									250
									260
									270
									280
291								299	300

401									410
									450
									460
									470
									480
491								499	500

601									610
									650
									660
									670
									680
691								699	700

801									810
									850
									860
									870
									880
891									900

101	102	103	104		106		108	109	110
111	112	113	114		116		118	119	120
141	142	143	144		146		148	149	150
									159
161									170
									180
181									
191								199	200

301									310
									350
									360
									370
									380
391								399	400

501									
								599	600

701									
									800

901									910
									950
									960
									970
									980
991								999	1000

I numeri interi, compresi tra 1 e 1000 (inclusi), che si scrivono senza utilizzare né la cifra 5 né la cifra 7 sono:
 $1000 - 36 - 36 - 36 - 36 - 37 - 99 - 37 - 99 - 36 - 36 = \mathbf{512}$.

I numeri interi, compresi tra 1 e 100.000 (inclusi), che si scrivono senza utilizzare né la cifra 5 né la cifra 7 sono quante le disposizioni con ripetizioni di 8 elementi in gruppi di 5: $D'_{8,5} = 8^5 = 32.768$.

I numeri interi compresi tra	sono
1 e 10	$8 = 8^1$
1 e 100	$64 = 8^2$
1 e 1000	$512 = 8^3$
1 e 10.000	$4096 = 8^4$
1 e 100.000	$32768 = 8^5$

15 In progressione

I primi tre termini della progressione geometrica scritta da Jacopo sono: $a, a+6, a+30$.

Quale sarà il quarto termine della progressione di Jacopo?

(Ricordiamo che i termini a_1, a_2, \dots, a_n costituiscono una progressione geometrica quando è sempre uguale (costante) il rapporto tra ogni termine e il precedente).

Soluzione

$$\frac{a+6}{a} = \frac{a+30}{a+6} ; \quad (a+6)(a+6) = a \cdot (a+30) ; \quad a^2 + 36 + 12a = a^2 + 30a ;$$

$$36 + 12a = 30a ; \quad 18a = 36 ; \quad a = 2 .$$

La progressione geometrica $2, 8, 32 \dots$ ha ragione $q = \frac{8}{2} = \frac{32}{8} = 4$

Quindi il quarto termine della progressione $2, 8, 32 \dots$ ha valore numerico $x_4 = 32 \cdot 4 = 128$.

Si conclude che il quarto termine della progressione di Jacopo è $a_4 = a + 126$.

16 Radici, che passione!

Nell'equazione $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$, le incognite a e b sono numeri interi non negativi.

Quante coppie di soluzioni ha l'equazione?

Soluzione

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{8}$$

l'equazione ha le seguenti 9 coppie di soluzioni:

$$(a = 8 ; b = 0)$$

$$(a = 7 ; b = 1)$$

$$(a = 6 ; b = 4)$$

$$(a = 5 ; b = 9)$$

$$(a = 4 ; b = 16)$$

$$(a = 3 ; b = 25)$$

$$(a = 2 ; b = 36)$$

$$(a = 1 ; b = 49)$$

$$(a = 0 ; b = 64)$$

17 La decrescita

Qual è il più piccolo multiplo non nullo di 2015, le cui cifre sono scritte in ordine decrescente (non necessariamente in senso stretto) da sinistra a destra?

Soluzione

I primi multipli sono:

$2015 \cdot 1$	2015
$2015 \cdot 3$	6045
$2015 \cdot 5$	10075

$2015 \cdot 2$	4030
$2015 \cdot 4$	8060

È inutile provare per 6, per 7, per 8, per 9, e per 10, perché avremmo $12xyz$, $14xyz$, $16xyz$, $18xyz$, 20150 .

$2015 \cdot 11$	22165
-----------------	-------

--	--

È inutile provare per 12, per 13 e per 14, perché avremmo $24xyz$, $26xyz$, $28xyz$.

$2015 \cdot 15$	30225
-----------------	-------

$2015 \cdot 16$	32240
-----------------	-------

È inutile provare per 17, per 18 e per 19, perché avremmo $34xyz$, $36xyz$, $38xyz$.

$2015 \cdot 20$	40300
$2015 \cdot 22$	44330

$2015 \cdot 21$	42315

Pertanto il multiplo cercato è $44330 = 2015 \cdot 22$

18 Gioco di mani

A turno, Carla e Milena mostrano alcune dita di una mano (una o due o tre o quattro o cinque dita). Il numero delle dita indicate si va ad aggiungere al totale precedente ma la nuova somma così ottenuta deve essere un numero primo. Per esempio, se Carla ha indicato due dita, Milena può rispondere con un dito o tre dita oppure anche con cinque dita perché $2+1=3$, $2+3=5$ e $2+5=7$ sono numeri primi. La prima (tra Carla e Milena) che, con il numero delle sue dita sommato al totale precedente, non riesce a ottenere un numero primo perde. È Milena che comincia il gioco.

Quante dita deve mostrare per essere sicura di vincere, se gioca al meglio, qualunque siano le risposte successive di Carla?

Soluzione

Mostrando 5 dita è sicura di vincere		
Milena	Carla	Totale
5		5
	2	7
4		11
	2	13
4		17
	2	19
4		23
Vince	STOP	

Mostrando 4 dita perde		
Milena	Carla	Totale
4		4
	1	5
2		7
	4	11
2		13
	4	17
2		19
	4	23
STOP		
Perde		

Mostrando 4 dita vince <i>(Tabella inutile)</i>		
Milena	Carla	Totale
4		4
	3	7
4		11
	2	13
4		17
	2	19
4		23
	STOP	
Vince		

**Mostrando 4 dita
non è sicura di vincere**

Mostrando 3 dita perde		
Milena	Carla	Totale
3		3
	2	5
2		7
	4	11
2		13
	4	17
2		19
	4	23
STOP		
Perde		

Mostrando 3 dita vince <i>(Tabella inutile)</i>		
Milena	Carla	Totale
3		3
	4	7
4		11
	2	13
4		17
	2	19
4		23
	STOP	
Vince		

**Mostrando 3 dita
non è sicura di vincere**

Mostrando 2 dita perde		
Milena	Carla	Totale
2		2
	3	5
2		7
	4	11
2		13
	4	17
2		19
	4	23
STOP		
Perde		

Mostrando 2 dita vince <i>(Tabella inutile)</i>		
Milena	Carla	Totale
2		2
	1	3
2		5
	2	7
4		11
	2	13
4		17
	2	19
4		23
Vince	STOP	

Mostrando 2 dita
non è sicura di vincere

Mostrando 1 dito perde		
Milena	Carla	Totale
1		1
	1	2
1		3
	2	5
2		7
	4	11
2		13
	4	17
2		19
	4	23
STOP		
Perde		

Mostrando 1 dito vince		
Milena	Carla	Totale
1		1
	1	2
3		5
	2	7
4		11
	2	13
4		17
	2	19
4		23
	STOP	
Vince		

Mostrando 1 dito vince		
Milena	Carla	Totale
1		1
	1	2
5		7
	4	11
2		13
	4	17
2		19
	4	23
STOP		
Perde		

Mostrando 1 dito non è sicura di vincere.
Inutile fare altre tabelle perché già c'è un caso in cui perde.