ESAME DI STATO

ESEMPI DI QUESITI DI MATEMATICA

PER LA TERZA PROVA

CONOSCENZE

1. La derivata di una funzione $y = f(x)$, in un punto x_0 interno al suo dominio, e:

   Risposta:
   il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale per $h \to 0$,
   e si scrive $\mathbf{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$

2. Il teorema di De L'Hopital dice che:

   Risposta:

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Sia } x_0 \in (a,b) \textit{ e siano } f(x) \textit{ e } g(x) \textit{ due funzioni:} \\ \textit{- continue in } [a,b] \textit{ e derivabili in } (a,b)-\{x_0\} \\ \textit{- } g^I(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)-\{x_0\} \\ \textit{- } f(x_0) = g(x_0) = 0 \\ \textit{- esiste (finito o infinito) il } \lim_{x\to x_0} \dfrac{f^I(x)}{g^I(x)} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)}\right)$$

3. Il $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} =$

   A: $+\infty$ B: non esiste C: 0 D: ∞

   Risposta: 0

4. La retta $y = k$ è un asintoto orizzontale per la funzione $y = f(x)$ se :

   A : $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$ B : $\lim_{x\to c} f(x) = k$

   C : $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ D : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

   Risposta: $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

5. La derivata della funzione $f(x) = x^n$ è uguale a :

   A: x^{n-1} B: $n \cdot x$ C: $n \cdot x^{n-1}$ D: $\dfrac{n-1}{n \cdot x}$

Risposta: $n \cdot x^{n-1}$

6. La derivata del prodotto di due funzioni $D\left[f(x) \cdot g(x)\right]$ è uguale a :

A: $f^I(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^I(x)$

B: $f^I(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^I(x)$

C: $\dfrac{f^I(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g^I(x)}{g(x)}$

D: $f^I(x) \cdot g^I(x)$

Risposta: $f^I(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^I(x)$

7. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo [a, b] e sia x_0 un punto di tale intervallo.

Si dice che x_0 è un punto di massimo relativo (proprio) per $f(x)$ se:

A: esiste un intorno I di x_0 contenuto in [a, b] tale che $\forall x \in I$ si ha che $f(x) \geq f(x_0)$

B: esiste un intorno I di x_0 contenuto in [a, b] tale che $\forall x \in I$ si ha che $f(x) < f(x_0)$

C: esiste un intorno I di x_0 contenuto in [a, b] tale che $\forall x \in I$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$

D: esiste un intorno I di x_0 contenuto in [a, b] tale che $\forall x \in I$ si ha che $f(x) > f(x_0)$

Risposta: **B**

8. Una funzione f (x), definita in un intervallo (a, b) si dice continua nel punto $c \in (a, b)$ quando:

Risposta: risulta che $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

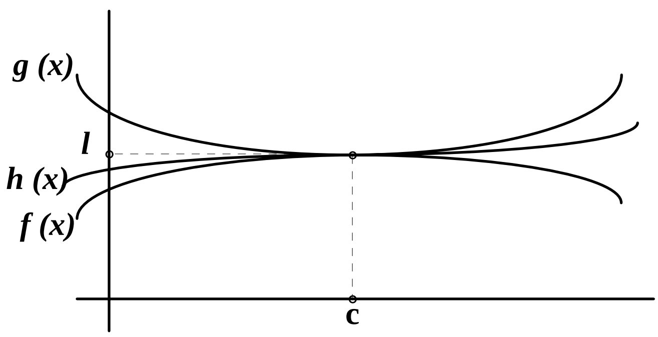
9. Una funzione f (x) ha nel punto c una discontinuità di prima specie quando:
Risposta: in tale punto esistono finiti il limite destro e il limite sinistro e sono fra loro diversi.

10. Una funzione f (x) ha nel punto c una discontinuità di seconda specie quando:
Risposta: in tale punto uno almeno dei due limiti destro e sinistro è infinito oppure non esiste.

11. Una funzione f (x) ha nel punto c una discontinuità di terza specie quando:
Risposta: in tale punto esiste finito il limite, ma il valore di ***f (c)*** o non esiste, oppure esiste ma risulta diverso dal limite.

12. Il Teorema del Confronto (o dei due Carabinieri) dice che :
Risposta:

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Se } f(x),\ h(x) \textit{ e } g(x) \textit{ sono tre funzioni} \\ \textit{definite nello stesso intervallo } (a,b), \\ \textit{escluso al più un punto } c \textit{ di esso e se} \\ \textit{risulta } \forall x \in (a,b) \textit{ che:} \\ f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = l \neq 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{x \to c} h(x) = l\right)$$



13. Quale fra le seguenti scritture non rappresenta una forma di indeterminazione :

A: $\frac{\infty}{0}$ B: $\frac{0}{0}$ C : $\frac{\infty}{\infty}$ D : $+\infty-\infty$

Risposta: **A**

14. Quale fra le seguenti scritture rappresenta una forma di indeterminazione :

A: $\frac{\infty}{0}$ B: $\frac{0}{\infty}$ C : $\frac{\infty}{\infty}$ D : $-\infty-\infty$

Risposta: **C**

15. Il limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} =$

A: 0 B: $+\infty$ C: 1 D: Non esiste

Risposta: **C**

16. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$

A: e B: $+\infty$ C: 1 D: Non esiste

Risposta: **A**

17. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_8 x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: $-\infty$ D: Non esiste

Risposta: **B** (Vedi grafico del logaritmo con a > 1 a pag. 16 della dispensa)

18. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_{0,7} x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: $-\infty$ D: Non esiste

Risposta: **C** (Vedi grafico del logaritmo con a < 1 a pag. 16 della dispensa)

19. Il limite $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: $-\infty$ D: Non esiste

Risposta: **A** (Vedi grafico dell'esponenziale con a > 1 a pag. 16 della dispensa)

20. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} 0,6^x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: $-\infty$ D: Non esiste

Risposta: **A** (Vedi grafico dell'esponenziale con a < 1 a pag. 16 della dispensa)

21. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \text{sen } x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: 1 D: Non esiste

Risposta: **D** (La funzione continua ad oscillare fra i valori -1 e 1 vedi grafico a pag. 17 della dispensa)

22. Il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x =$

A: 0 B: $+\infty$ C: 1 D: Non esiste

Risposta: **D** (La funzione continua ad oscillare fra i valori -1 e 1 vedi grafico a pag. 17 della dispensa)

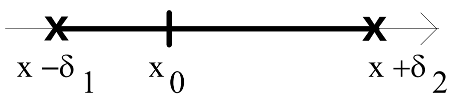
23. Il limite $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

    A : se x è dispari   B : se $a > 0$ C : se $0 < a < 1$ D : se $a > 1$

    Risposta: **D** (Vedi grafico dell'esponenziale con a > 1 a pag. 16 della dispensa)

24. Dai la definizione di intorno completo di un punto x_0

    Risposta:



Si chiama **intorno completo** di un punto (o numero) x_0 un qualsiasi intervallo aperto I (x_0) contenente x_0 .

25. Dai la definizione di punto di accumulazione.

    Risposta: Sia E un sottoinsieme di R e **c** ∈ R; Il punto **c** si dice che è un **punto di accumulazione** di E quando in ogni intorno di **c** ci sono infiniti punti di E .

26. Dai la definizione di $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

    Risposta:

    Si dice che la funzione ***f(x)*** ha per limite l'infinito ∞, al tendere di ***x*** all'infinito ∞, e si scrive: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo di infinito ***I*** = (–∞, –M) U (M, +∞), con M>0 scelto grande a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo di infinito ***H***=(–∞, –N) U (N,+∞) , tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti all'intorno di infinito ***H*** , i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno ***I*** di infinito ∞.

    In simboli: $\forall M > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \;\; e \;\; |x| > N \;\; si \; ha \; che \;\; |f(x)| > M$

27. Dai la definizione di $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$

    Risposta:

    Si dice che la funzione f(x) ha per limite il numero reale l, al tendere di x all'infinito ∞, e si scrive : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di ***l***, scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo di infinito ***H*** = (–∞, –N) U (N, +∞), tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti all'intorno di infinito ***H*** , i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno *I* di *l* .

    In simboli: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \;\; e \;\; |x| > N \;\; si \; ha \; che \;\; |f(x) - l| < \varepsilon$

28. Dai la definizione di $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

    Risposta:

    Si dice che la funzione ***f(x)*** ha per limite il numero reale ***l***, al tendere di ***x*** al numero reale ***c***, e si scrive : $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo ***I*** di ***l***, scelto piccolo a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo ***H*** del punto ***c***, tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti a tale intorno ***H***, escluso al più il punto ***c*** (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno ***I*** di ***l***. In simboli : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; t.c. \;\; \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) e \;\; x \neq c \;\; si \; ha \; che \;\; |f(x) - l| < \varepsilon$

28. Dai la definizione di $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

<u>***Risposta:***</u>

Si dice che la funzione ***f(x)*** ha per limite l'infinito *∞*, al tendere di ***x*** al numero reale ***c***, e si scrive : $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ quando, in corrispondenza ad un qualsiasi intorno completo di infinito ***I*** = (–∞, –M) U (M, +∞), con M>0 scelto grande a piacere, è sempre possibile determinare un intorno completo ***H*** del punto ***c***, tale che per tutti i punti ***x*** del dominio ***D*** della funzione ed appartenenti a tale intorno ***H***, escluso al più il punto ***c*** (dove la funzione può non essere definita), i corrispondenti valori ***f(x)*** della funzione cadono nell'intorno ***I*** di infinito. In simboli :

$$\forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } \ \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \ \text{ e } \ x \neq c \ \text{ si ha che } \ |f(x)| > M$$

29. Quale, fra le seguenti, è la definizione esatta di $\lim_{x \to c} f(x) = k$? [D = dominio di f(x)]

A : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \ \text{ e } \ |x| > N \ \text{ si ha che } \ |f(x) - k| < \varepsilon$

B : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \ \text{ e } \ x \neq c \ \text{ si ha che } \ |f(x) - k| < \varepsilon$

C : $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \ \text{ e } \ x \neq c \ \text{ si ha che } \ |f(x)| > M$

D : $\forall M > 0 \ \exists N > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \ \text{ e } \ |x| > N \ \text{ si ha che } \ |f(x)| > M$

<u>***Risposta:***</u> **B**

30. Quale, fra le seguenti, è la definizione esatta di $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$? [D = dominio di f(x)]

A : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \ \text{ e } \ |x| > N \ \text{ si ha che } \ |f(x) - k| < \varepsilon$

B : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \ \text{ e } \ x \neq c \ \text{ si ha che } \ |f(x) - k| < \varepsilon$

C : $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \cap (c - \delta, c + \delta) \ \text{ e } \ x \neq c \ \text{ si ha che } \ |f(x)| > M$

D : $\forall M > 0 \ \exists N > 0 \ \text{ t.c. } \forall x \in D \ \text{ e } \ |x| > N \ \text{ si ha che } \ |f(x)| > M$

<u>***Risposta:***</u> **C**

31. Il Dominio (o campo di Esistenza) di una funzione y = f (x) è:

<u>***Risposta:***</u>

L'insieme dei valori della variabile indipendente x per i quali esiste il corrispondente valore della variabile dipendente y.

32. Una funzione y = f (x) si dice iniettiva quando:

<u>***Risposta:***</u>

quando elementi differenti x del dominio A hanno differenti elementi corrispondenti y nel codominio B.

In simboli : $\forall \ x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$ si ha che $f(x1) \neq f(x2)$

33. La funzione inversa f^{-1} della funzione f esiste quando:

<u>***Risposta:***</u> la funzione f è biunivoca.

34. Una funzione y = f (x) si dice biunivoca quando:

<u>***Risposta:***</u> la funzione y = f (x) è sia iniettiva sia suriettiva

35. Una funzione y = f (x) si dice suriettiva quando:

<u>***Risposta:***</u> ogni elemento y dell'insieme di arrivo B ha almeno un corrispondente x nel Dominio A, cioè quando B = f (A). In simboli : $\forall \ y \in B \ \exists \ x \in A$ tale che y = f(x)

36. Una funzione y = f (x) si dice monotona in un intervallo (a, b) quando:
    Risposta: in tale intervallo è crescente, oppure decrescente, oppure non crescente, oppure non decrescente.

37. Una funzione è:
    Risposta: una qualsiasi legge fra i due insiemi A e B, che associa ad ogni elemento $\mathbf{x \in A}$ (variabile indipendente o argomento della funzione) uno e un solo elemento $\mathbf{y \in B}$ (variabile dipendente), e si scrive **y = f(x)**.

38. Una funzione si dice periodica quando:
    Risposta: $\mathbf{f(x+T) = f(x)}$ con $x,\ x+T \in$ Dominio di f(x)

COMPETENZE

39. La funzione $y = \log_a x$ (con la base a >1) è :

A: Iniettiva ma non suriettiva B: Ne iniettiva ne suriettiva
C: Suriettiva ma non iniettiva D: Biunivoca
Risposta: **D**

40. La funzione $y = a^x$ (con la base a >1) è :

A: Iniettiva ma non suriettiva B: Suriettiva ma non iniettiva
C: Ne iniettiva ne suriettiva D: Biunivoca
Risposta: **D**

41. La funzione $y = 3x - 4$ è :

A: Iniettiva ma non suriettiva B: Ne iniettiva ne suriettiva
C: Suriettiva ma non iniettiva D: Biunivoca
Risposta: **D** (è una retta, che è una funzione biunivoca).

42. La disequazione $\frac{2x+3}{x-2} < 1$ ha per soluzione:

A: $x > 2$ B: $x < -\frac{3}{2}$ C: Ø D: $-5 < x < 2$

Risposta: **D** $\frac{2x+3}{x-2} - 1 < 0$; $\frac{2x+3-x+2}{x-2} < 0$; $\frac{x+5}{x-2} < 0$; $\begin{matrix} x+5>0 \\ x-2>0 \end{matrix}$;

		-5		0	
	-		+		+
$x > -5$ $x > 2$	-		-		+
	+		-		+

43. La disequazione $|x - 3| < 1$ ha per soluzione:

A: $x > 4$ B: $2 < x < 4$ C: Ø D: $-5 < x < 2$

Risposta: **B** $\begin{cases} x-3<1 \\ x-3>-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<3+1 \\ x>3-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<4 \\ x>2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $2 < x < 4$

44. La funzione $f(x) = \frac{2-3x}{3-x}$ ha nel punto $x = 3$:

A : ha una discontinuità di I^a specie B : ha una discontinuità di II^a specie
C : ha una discontinuità di III^a specie D : è continua
Risposta: **B** (infatti $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$).

45. La funzione $f(x) = \frac{2x-10}{x-5}$ ha nel punto $x = 5$:

A : ha una discontinuità di I^a specie B : ha una discontinuità di II^a specie
C : ha una discontinuità di III^a specie D : è continua
Risposta: C (infatti la funzione f (x) non esiste per x=5 mentre il limite $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$).

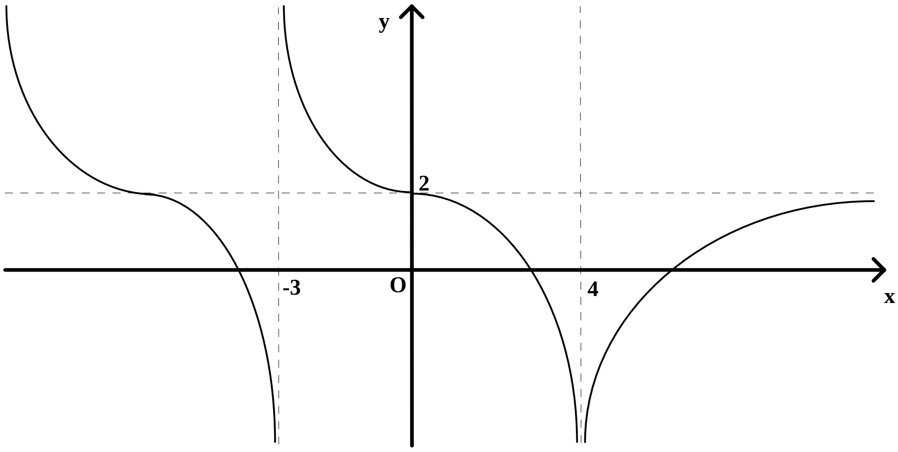
46. Dall'analisi del grafico della funzione y = f (x) sotto rappresentata:

A: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

B: $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

C: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

D: $\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$



Risposta: **A**

47. Dall'analisi del grafico della funzione y = f (x) sopra rappresentata:

A: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ B: $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

C: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ D: $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

Risposta: **B**

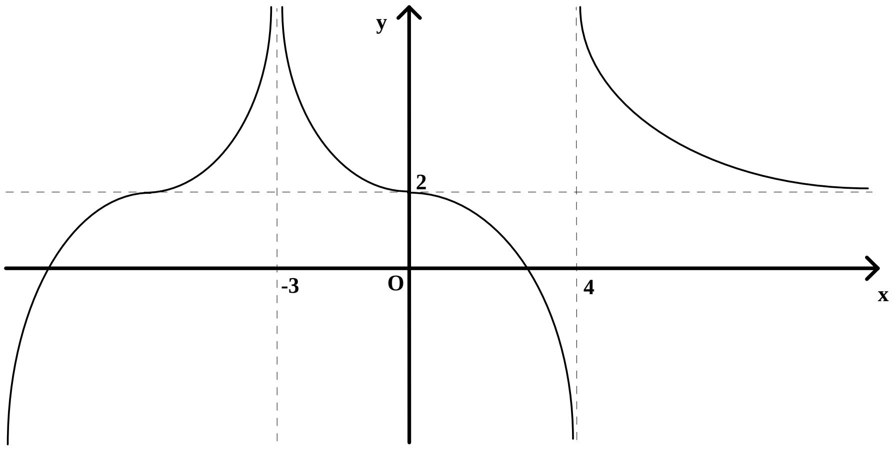
48. Dall'analisi del grafico della funzione y = f (x) sotto rappresentata:

A: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

B: $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

C: $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

D: $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$



Risposta: **B**

49. Dall'analisi del grafico della funzione y = f (x) sopra rappresentata:

A: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ B: $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

C: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ C: $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

Risposta: **C**

50. Il dominio della funzione $y = \dfrac{3-5x}{x^2+4x-12}$ è :

A : $(-\infty, +\infty)$ B : $\{\forall x \in R \ / \ x \neq -6, \ x \neq 2\}$

C : $\varnothing$ D : $\{\forall x \in R \ / \ x \neq -6, \ x \neq 2\}$

Risposta: **D** (Infatti risolvendo l'equazione $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} =$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1(-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} =$$

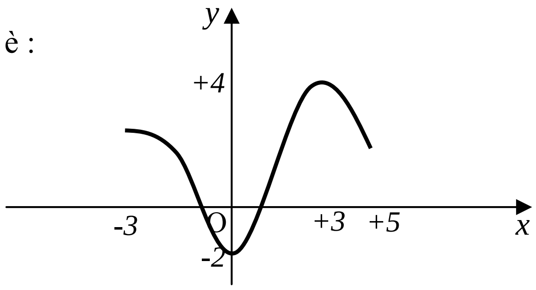
$$= \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-4-8}{2} = -6 \\ x_2 = \dfrac{-4+8}{2} = 2 \end{array}$$ si trovano gli unici punti che non fanno parte del dominio).

51. Il Dominio della funzione a fianco rappresentata è :

A: $(-3, -2)$ B: $(-3, +5)$

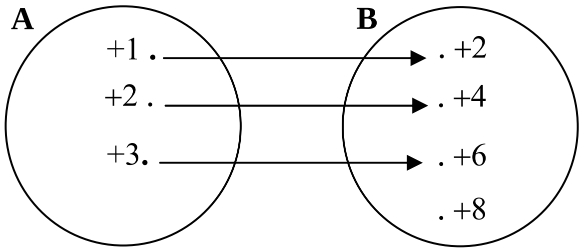
C: $(-2, +4)$ D: $(-\infty, +\infty)$

Risposta: **B**



52. La corrispondenza rappresentata nel grafico sottostante è :

A: una funzione biunivoca
B: una funzione iniettiva ma non suriettiva
C: una funzione suriettiva ma non iniettiva
D: non è una funzione

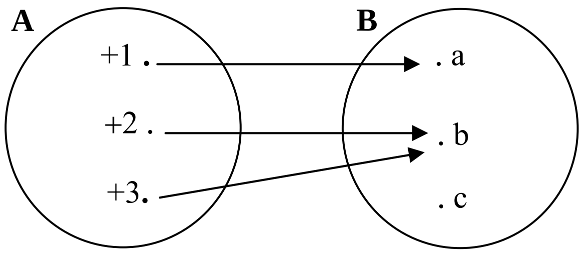


Risposta: **B**

53. La corrispondenza rappresentata nel grafico sottostante è :

A: una funzione biunivoca
B: una funzione iniettiva ma non suriettiva
C: una funzione suriettiva ma non iniettiva
D: una funzione

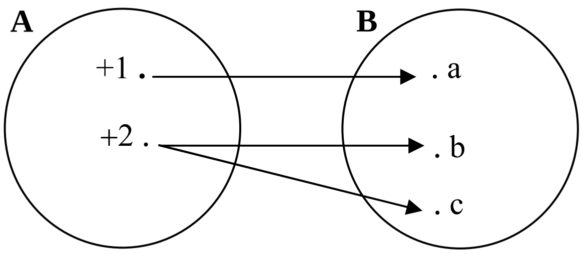
Risposta: **D**



54. La corrispondenza rappresentata nel grafico sottostante è :

A: una funzione biunivoca
B: una funzione iniettiva ma non suriettiva
C: una funzione suriettiva ma non iniettiva
D: non è una funzione

Risposta: **D**



55. La corrispondenza rappresentata nel grafico sottostante è :

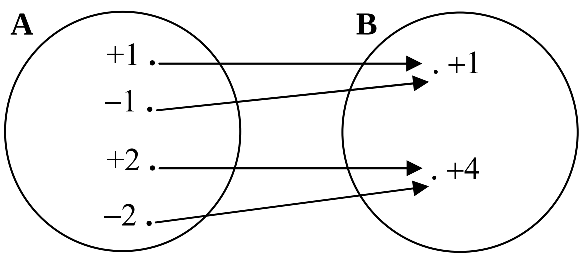
A: una funzione biunivoca

B: una funzione iniettiva ma non suriettiva

C: una funzione suriettiva ma non iniettiva

D: non è una funzione

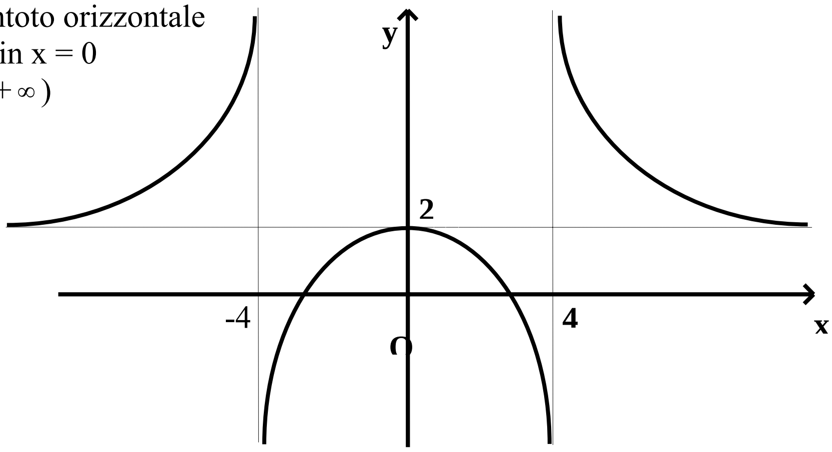
Risposta: **C**



56. Dall'analisi del grafico della funzione y = f (x) sotto rappresentata, la funzione ha:

A: due asintoti orizzontali ed un asintoto verticale
B: due asintoti verticali ed un asintoto orizzontale
C: un punto di Massimo assoluto in x = 0
D: per Dominio l'Intervallo $(-\infty, +\infty)$

Risposta: **B**



57. Senza effettuare calcoli, il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5x+2}{x^3-4x^2+7x+4}$ è :

A: ∞ B: 0 C: $\dfrac{\infty}{\infty}$ D: $-\dfrac{3}{4}$

Risposta: **B** (Essendo $x \to \infty$, si esaminano i gradi del numeratore e del denominatore. Avendo il denominatore un grado maggiore, il limite vale zero).

58. Senza effettuare calcoli, il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5x+2}{5+3x-4x^2}$ è :

A: ∞ B: 0 C: $\dfrac{\infty}{\infty}$ D: $-\dfrac{3}{4}$

Risposta: **D** (Essendo $x \to \infty$, si esaminano i gradi del numeratore e del denominatore. Avendo il il numeratore e il denominatore lo stesso grado, il limite è dato dal rapporto dei coefficienti delle x di grado massimo, cioè $-\dfrac{3}{4}$).

59. Senza effettuare calcoli, il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3+5x^3+2x^4}{x^3-4x^2+7}$ è :

A: ∞ B: 0 C: $\dfrac{\infty}{\infty}$ D: $-\dfrac{3}{4}$

Risposta: **A** (Essendo $x \to \infty$, si esaminano i gradi del numeratore e del denominatore. Avendo il numeratore un grado maggiore, il limite vale ∞).

60. Gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$ sono:

A : Non ha asintoti B : $x = -2$

C : $x = -2$ e $y = 0$ D : $x = -2$ e $y = \dfrac{1}{8}$

Risposta: **C** (Essendo il Dominio di f (x) = $(-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$, ed essendo il $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, la funzione ha l'asintoto orizzontale y = 0 e l'asintoto verticale x = –2).

61. Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^3 \quad 5x}{x^2 + 4}$, stabilisci quale fra le seguenti proposizioni è quella corretta:

A: $f(x)$ ha due asintoti verticali e uno orizzontale

B: $f(x)$ ha due asintoti verticali

C: $f(x)$ ha due asintoti verticali e uno obliquo

D: $f(x)$ ha un asintoto obliquo

Risposta: **D** (Essendo il Dominio di $f(x)$ uguale a $(-\infty, +\infty)$ poiché $x^2 + 4 = 0$ non ha soluzioni reali, non ci sono asintoti verticali. Essendo poi il grado del numeratore maggiore di una unità rispetto a a quello del denominatore, c'è un asintoto obliquo e non c'è quello orizzontale).

62. La funzione $y = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + 2x}$ ha :

A: due asintoti verticali ed uno orizzontale

B: un asintoto verticale ed uno orizzontale

C: due asintoti verticali e uno obliquo

D: due asintoti verticali

Risposta: **C** (Essendo il Dominio di $f(x)$ uguale a $(-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$ e $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ ci sono due asintoti verticali. Essendo poi il grado del numeratore maggiore di una unità rispetto a quello del denominatore, c'è un asintoto obliquo e non c'è quello orizzontale).

63. Gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 3}{x^3 - 1}$ sono:

A : Non ha asintoti

B : $x = 1$ e $y = 1$

C : $x = 1$ e $y = 2$

D : $y = 1$

Risposta: **C** (Essendo $x^3 - 1 = 0$; $x^3 = 1$; $x = \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow$ il Dominio di $f(x)$ è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Essendo poi il $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty \Rightarrow x = 1$ è un asintoto verticale.

Mentre essendo il $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ è un asintoto orizzontale.

64. Quale delle seguenti derivate è quella errata

A : $D(3x - 5x^2) = 3 - 10x$

B : $D(x^2 \cdot \sin x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$

C : $D(x + \sin x) = 1 + \cos x$

D : $D\dfrac{5x}{x+3} = \dfrac{5x}{(x+3)^2}$

Risposta: **D** (Infatti $D\dfrac{5x}{x+3} = \dfrac{5 \cdot (x+3) - 5x \cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{5x + 15 - 5x}{(x+3)^2} = \dfrac{15}{(x+3)^2}$

65. Quale delle seguenti derivate è quella errata

A : $D(5+\text{sen } x)=\cos x$ B : $D(5x+3)^2 = 2\cdot(5x+3)$

C : $D(e^x - 5x^4) = e^x - 20x^3$ D : $D\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Risposta: **B** (Infatti $D(5x+3)^2 = 2\cdot(5x+3)\cdot 5 = 10\cdot(5x+3)$

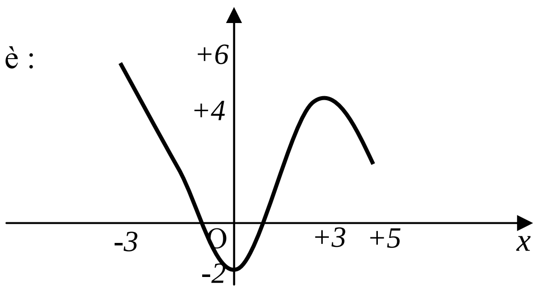
66. La derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^5}{e^x}$ è :

A: $\dfrac{5x^4 - x^5}{e^x}$ B: $\dfrac{5x^4 - x^5\cdot e^x}{e^{2x}}$

C: $\dfrac{5x^4\cdot e^x - x^5\cdot e^x}{e^x}$ D: $\dfrac{5x^4\cdot e^x + x^5\cdot e^x}{e^{2x}}$

Risposta: **A** (Infatti $D\dfrac{x^5}{e^x} = \dfrac{5x^4\cdot e^x - x^5\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{x^4 e^x\cdot(5-x)}{e^{2x}} = \dfrac{x^4\cdot(5-x)}{e^x} = \dfrac{5x^4 - x^5}{e^x}$

67. Il Dominio della funzione a fianco rappresentata è :



A: (–2, +6) B: (–3, +5)

C: (–2, +4) D: $(-\infty, +\infty)$

Risposta: **B**

68. Il Codominio della funzione sopra rappresentata è :

A: (–2, +6) B: (–3, +5) C: (–2, +4) D: $(-\infty, +\infty)$

Risposta: **A**

69. La funzione sopra rappresentata ha un punto di min relativo in:

A: x = –3 B: x = 0 C: x = +3 D: x = +5

Risposta: **B**

70. La funzione sopra rappresentata ha un punto di min assoluto in:

A: x = –3 B: x = 0 C: x = +3 D: x = +5

Risposta: **B**

71. La funzione sopra rappresentata ha un punto di max relativo in:

A: x = –3 B: x = 0 C: x = +3 D: x = +5

Risposta: **C**

72. La funzione sopra rappresentata ha un punto di max assoluto in:

A: x = –3 B: x = 0 C: x = +3 D: x = +5

Risposta: **A**

73. Quale fra le seguenti non è una funzione continua in $(-\infty,+\infty)$

A: y = sen x B: y = cos x C: y = 3x + 5 D : $y = \dfrac{x}{x-3}$

Risposta: **D (la funzione y =** $\dfrac{x}{x-3}$ non è continua in x = 3, mentre le funzioni seno e coseno e la retta y = 3x + 5 sono continue in tutto l'insieme $(-\infty,+\infty)$ (pag. 15- 7 Dispensa)).

CAPACITA'

74. Calcola il Dominio della funzione $y=\dfrac{3x-4x^2}{3x^2-5x+2}$

Risposta: Si risolve l'equazione $3x^2-5x+2=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=$

$\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\dfrac{5\pm 1}{6}=$ $\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{5+1}{6}=\dfrac{6}{6}=1 \end{array}$ Questi punti non fanno parte del dominio, perché annullano il

denominatore $\Rightarrow$ Dom (f) = $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

75. Calcola il Dominio della funzione $y=\sqrt[8]{-3x^2+5x-2}\ +\ 3\operatorname{sen} x$

Risposta: La funzione seno è definita $\forall x\in R$. La funzione irrazionale di indice pari esiste quando il radicando e positivo o nullo, cioè quando $-3x^2+5x-2\ge 0$. Pertanto l'unica disequazione da risolvere resta la prima, cioè $-3x^2+5x-2\ge 0$.

Per risolvere tale disequazione occorre, per prima cosa risolvere l'equazione $-3x^2+5x-2=0$;

$3x^2-5x+2=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\dfrac{5\pm 1}{6}=$

$x_1=\dfrac{5-1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$x_2=\dfrac{5+1}{6}=\dfrac{6}{6}=1$

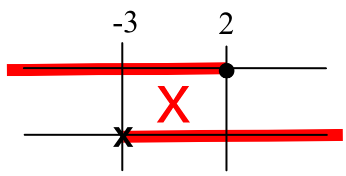
e poi guardare i segni del I° coefficiente e il segno della disequazione. In questo caso il I° coeff. è negativo, il segno della disequazione è positivo (segni discordi $\leftrightarrow$ valori interni). Pertanto $-3x^2+5x-2\ge 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni 2/3 e 1.

$\Rightarrow$ Dom (f) = $\left[\dfrac{2}{3},\ 1\right]$

76. Calcola il Dominio della funzione $y=\sqrt[8]{-3x+6}\ +\ \log_2(x+3)$

Risposta: La funzione logaritmo esiste quando il suo argomento è positivo. La funzione irrazionale di indice pari esiste quando il radicando e positivo o nullo. Pertanto in questo caso occorre che sia entrambe soddisfatte le due disequazioni $-3x+6\ge 0$ e $x+3>0$. Cioè occorre

risolvere il sistema $\begin{cases}-3x+6\ge 0\\ x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}-3x\ge -6\\ x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}3x\le 6\\ x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 2\\ x>-3\end{cases}$

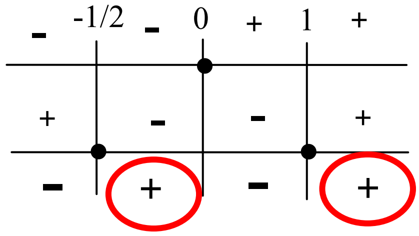


$\Rightarrow$ Dom (f) = $(-3,\ 2]$

77. Calcola il Dominio della funzione $y = \sqrt{2x^3 - x^2 - x}$

Risposta: La funzione irrazionale di indice pari esiste quando il radicando e positivo o nullo, cioè quando $2x^3 - x^2 - x \geq 0$ scomponendo in fattori si ha $x \cdot (2x^2 - x - 1) \geq 0$ e studiando il

prodotto dei segni si ha $\begin{matrix} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{matrix}$ **(*)** $\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{1}{2}; x \geq 1 \end{matrix}$



(*) Per risolvere la disequazione $2x^2 - x - 1 \geq o$

Occorre prima risolvere l'equazione: $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} x_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1 \end{matrix}$$

e poi guardare i segni del I° coefficiente e il segno della disequazione. In questo caso sono entrambi positivi.

Pertanto $2x^2 - x - 1 \geq o$ è verificata per valori esterni alle soluzioni -1/2 e 1.

Discutendo il prodotto dei segni dei due fattori $x \geq 0$ e $2x^2 - x - 1 \geq o$ si ottiene che il loro prodotto $x \cdot (2x^2 - x - 1) \geq 0$ è positivo in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [1, +\infty]$.

In definitiva il dominio della funzione è l'insieme $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [1, +\infty]$.

78. Calcola il Dominio della funzione $y = \frac{\log(x+3)^5}{\sqrt[4]{3^{2x-1}}}$

Risposta: Nella funzione compare :

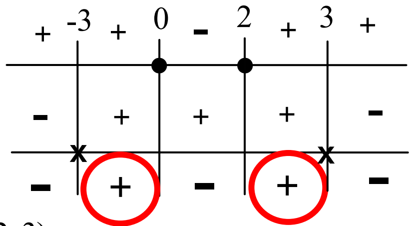
a numeratore, il logaritmo, pertanto il suo argomento deve essere positivo, cioè x + 3 > 0;

a denominatore, la funzione irrazionale di indice pari, pertanto il suo argomento deve essere positivo, cioè $3^{2x-1} > 0$. Ma essendo la funzione esponenziale $3^{2x-1} > 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow$ l'unica disequazione da risolvere resta la prima, cioè x + 3 > 0; che da per risultato x > –3. In definitiva il dominio della funzione è l'insieme $(-3, +\infty)$.

79. Calcola il Dominio della funzione $y = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 2x}{9 - x^2}}$

Risposta: La funzione irrazionale di indice pari esiste quando il radicando e positivo o nullo, cioè quando $\frac{x^2 - 2x}{9 - x^2} \geq 0$. Discutendo il prodotto dei segni dei due termini della

frazione (denominatore $\neq 0$) si ha $\begin{matrix} x^2 - 2x \geq 0 & x \leq 0; \ x \geq 2 \\ 9 - x^2 > 0 & -3 < x < 3 \end{matrix}$



In definitiva il dominio della funzione è l'insieme $(-3, \ 0] \cup [2, 3)$.

80. Calcola il Dominio della funzione $y = 2 \cdot \sqrt[6]{2x-6} - 3\sqrt[5]{x^2-4} + 8^{x+3}$

Risposta: La funzione irrazionale di indice pari esiste quando il radicando e positivo o nullo, la funzione irrazionale di indice dispari esiste $\forall x \in R$, la funzione esponenziale esiste $\forall x \in R$. Pertanto l'unica disequazione da risolvere è $2x - 6 \geq 0$; $2x \geq 6$; $x \geq \frac{6}{2}$; $x \geq 3$. Pertanto il dominio della funzione è l'intervallo $[3,+\infty)$

81. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}$

Risposta: Quando $x \to \infty$ la frazione $\frac{5}{x^3} \to 0$. Pertanto il limite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3} = 0$

82. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x^3}$

Risposta: Quando $x \to 0$ la frazione $\frac{5}{x^3} \to \infty$. Pertanto il limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x^3} = \infty$

83. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5 - 3x^2 - 4x}{2x^2 - 5x}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Per eliminarla esaminiamo due metodi:

I° Metodo Dividiamo tutti i termini per la x di grado massimo, cioè dividiamo per x^2 $\Rightarrow$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}} - 3 - \overset{\to 0}{\frac{4}{x}}}{2 - \underset{\to 0}{\frac{5}{x}}}$. Ma quando $x \to \infty$, $\frac{5}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x} \to 0$, $\frac{5}{x} \to 0$. Pertanto il limite è uguale a $-\frac{3}{2}$ (il limite è uguale al rapporto dei coefficienti delle x di grado massimo).

II° Metodo Applichiamo il Teorema di De L'Hopital, cioè deriviamo sia il numeratore sia il denominatore $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{0 - 6x - 4}{4x - 5}$, ma il limite si presenta ancora sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.
Pertanto riapplichiamo il Teorema di De L'Hopital $\Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-6}{4}$. Tale limite, evidentemente, vale $\frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$.

84. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-3x^2}{2x^3-5x}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$. Per eliminarla esaminiamo due metodi:

I° Metodo Dividiamo tutti i termini per la x di grado massimo, cioè dividiamo per x^3 $\Rightarrow$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{7}{x^3}}_{0} - \underbrace{\frac{3}{x}}_{0}}{2 - \underbrace{\frac{5}{x^2}}_{0}}$$

. Ma quando $x \to \infty$, $\dfrac{7}{x^3} \to 0$, $\dfrac{3}{x} \to 0$, $\dfrac{5}{x^2} \to 0$. Pertanto il limite è uguale a zero. (il grado numeratore è minore del grado del denominatore).

II° Metodo Applichiamo il Teorema di De L'Hopital, cioè deriviamo sia il numeratore sia il denominatore $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{0-6x}{6x^2-5}$, ma il limite si presenta ancora sotto la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pertanto riapplichiamo il Teorema di De L'Hopital $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-6}{12x} = 0$ Tale limite, evidentemente, vale zero.

85. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-4x^3}{3x^2-5x}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$. Per eliminarla esaminiamo due metodi:

I° Metodo Dividiamo tutti i termini per la x di grado massimo, cioè dividiamo per x^2 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{7}{x^3}}_{0} - 4}{\underbrace{\frac{3}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{5}{x^2}}_{0}}$$

. Ma quando $x \to \infty$, $\dfrac{7}{x^3} \to 0$, $\dfrac{3}{x} \to 0$, $\dfrac{5}{x^2} \to 0$. Pertanto il limite è uguale a ∞. (il grado numeratore è maggiore del grado del denominatore).

II° Metodo Applichiamo il Teorema di De L'Hopital, cioè deriviamo sia il numeratore sia il denominatore $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{0-12x^2}{6x-5}$, ma il limite si presenta ancora sotto la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pertanto riapplichiamo il Teorema di De L'Hopital $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-24x}{6} = \infty$ Tale limite, evidentemente, vale zero.

86. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{3-x}$

Risposta: Quando $x\to 3$ il denominatore tende a zero. Pertanto il limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5}{\underbrace{3-x}_{0}}=\infty$

87. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{5}$

Risposta: Quando $x\to 3$ il numeratore tende a zero. Pertanto il limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\overbrace{3-x}^{0}}{5}=0$

88. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x-12}{x^2+2x-15}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

I° Metodo Scomponiamo in fattori i termini della frazione $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\frac{4\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+5)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4}{x+5}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(*) $x^2+2x-15$ si può scomporre con Ruffini in $(x-3)\cdot(x+5)$

	1	2	−15
3		3	+15
	1	5	0

II° Metodo Applichiamo il Teorema di De L'Hopital, cioè deriviamo sia il numeratore sia il denominatore $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\frac{4}{2x+2}=\frac{4}{2\cdot 3+2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

89. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-7\text{sen } x}{4x}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per eliminarla sfruttiamo il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-7\text{sen } x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{4x}-\frac{7\text{sen } x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\cdot\overbrace{\frac{\text{sen } x}{x}}^{1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\cdot 1=-\frac{4}{4}=-1$$

90. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{3x}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per eliminarla sfruttiamo il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\log(1+5x)}{5x}}_{1}\cdot\frac{5}{3}=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

91. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{8-x}{1-\sqrt{9-x}}$

Risposta: Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

Per eliminarla moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato di $1-\sqrt{9-x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{8-x}{1-\sqrt{9-x}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{9-x}}{1+\sqrt{9-x}}$ e ricordando che $(I+II)\cdot(I-II) = I^2 - II^2$ si ha

$$\lim_{x \to 8} \frac{(8-x)\cdot(1+\sqrt{9-x})}{1^2-\left(\sqrt{9-x}\right)^2} = \lim_{x \to 8} \frac{(8-x)\cdot(1+\sqrt{9-x})}{1-(9-x)} = \lim_{x \to 8} \frac{(8-x)\cdot(1+\sqrt{9-x})}{1-9+x} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(8-x)\cdot(1+\sqrt{9-x})}{x-8} = \lim_{x \to 8} \frac{(8-x)\cdot(1+\sqrt{9-x})}{-\cancel{(8-x)}} = \lim_{x \to 8} \frac{1+\sqrt{9-x}}{-1} = \frac{1+\sqrt{1}}{-1} = -2$$

92. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{x^3-1} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{x^3-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$.

93. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{3x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{3x} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \operatorname{sen} x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \cos x}{3} = \dfrac{5}{3}$.

94. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cdot e^x - 2}{\operatorname{sen} x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cdot e^x - 2}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0}$ applicando De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cdot e^x - 2}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cdot e^x}{\cos x} = 2$.

95. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-3x^2}{5x^2+4x-6}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-3x^2}{5x^2+4x-6} = \dfrac{\infty}{\infty}$ applicando De L'Hopital si ha $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-3x^2}{5x^2+4x-6} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6x}{10x+4} = \dfrac{\infty}{\infty}$

applicando nuovamente De L'Hopital si ha : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6}{10} = -\dfrac{3}{5}$.

96. Calcola il valore del seguente limite $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x = 0 \cdot \infty$ ma il limite può essere scritto: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ e con De L'Hopital si

ha $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x}\cdot x^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0$.

97. Calcola la derivata della funzione $f(x) = 5 - 3x + x^2 - 5x^4$

Risposta: $D(5-3x+x^2-5x^4) \;=\; 0-3+2x-5\cdot 4x^3 \;=\; -3+2x-20x^3$.

98. Calcola la derivata della funzione $f(x) = e^x + 5\,\text{sen}\,x - 3\cos x + 5^x - \log x$

Risposta: $D(e^x + 5\,\text{sen}\,x - 3\cos x + 5^x - \log x) \;=\; e^x + 5\cos x - 3\cdot(-\text{sen}\,x) + 5^x\cdot\log 5 \;-\; \dfrac{1}{x} =$

$= e^x + 5\cos x + 3\text{sen}\,x + 5^x\cdot\log 5 \;-\; \dfrac{1}{x}$

99. Calcola la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$

Risposta: $D = \dfrac{x}{\log x} \;=\; \dfrac{1\cdot\log x - x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2} = \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}$

100. Calcola la derivata della funzione $y = \dfrac{7-5x}{3-4x^2}$

Risposta: $D\dfrac{7-5x}{3-4x^2} \;=\; \dfrac{-5\cdot(3-4x^2)-(7-5x)\cdot(-8x)}{\left(3-4x^2\right)^2} \;=\; \dfrac{-15+20x^2+8x\cdot(7-5x)}{\left(3-4x^2\right)^2} \;=$

$= \dfrac{-15+20x^2+56x-40x^2}{\left(3-4x^2\right)^2} \;=\; \dfrac{-15+56x-20x^2}{\left(3-4x^2\right)^2}$

101. Calcola la derivata della funzione $f(x) = \sqrt[7]{x^5}$

Risposta: Applicando la regola di derivazione $D\sqrt[n]{x^p} \;=\; \dfrac{p}{n\sqrt[n]{x^{n-p}}}$ si ha $D\sqrt[7]{x^5} \;=\; \dfrac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

102. Calcola la derivata della funzione $f(x) = x^7\cdot\text{sen}x$

Risposta: $D\; x^7\cdot\text{sen}x \;=\; 7x^6\cdot\text{sen}x + x^7\cdot\cos x$

103. Calcola la derivata della funzione $f(x) = (x^3+5)^7$

Risposta: $D\;(x^3+5x)^7 \;=\; 7\cdot(x^3+5x)^6\cdot(3x^2+5)$

104. Calcola la derivata della funzione $f(x) = \text{tg}\,x$

Risposta: $D\,\text{tg}\,x = D\,\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} \;=\; \dfrac{\cos x\cdot\cos x - (-\text{sen}\,x)\cdot\text{sen}\,x}{\cos^2 x} \;=\; \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

105. Calcola la derivata quarta della funzione $f(x) = \text{sen}\,x$

Risposta: $f^{I}(x) = \cos x$; $f^{II}(x) = -\,\text{sen}\,x$; $f^{III}(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = -(-\cos x) = \cos x$

106. Determina gli asintoti della funzione $y = \dfrac{2-5x^2}{4-x^2}$

Risposta: $y = \dfrac{2-5x^2}{4-x^2}$ è una funzione razionale fratta.

Il suo Dominio è $(-\infty,-2)\cup(-2,+2)\cup(+2,+\infty)$.

Essendo $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-5x^2}{4-x^2} = \infty \;\Rightarrow\; x = -2$ è un asintoto verticale.

Essendo $\lim\limits_{x\to +2} \dfrac{2-5x^2}{4-x^2} = \infty \;\Rightarrow\; x = +2$ è un asintoto verticale.

Essendo $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2-5x^2}{4-x^2} = \dfrac{\infty}{\infty} = ?$ dividendo tutti i termini per x^2 si ha $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{2}{x^2}-5}{\frac{4}{x^2}-1} = \dfrac{-5}{-1} = 5 \;\Rightarrow\; y = 5$

è un asintoto orizzontale.

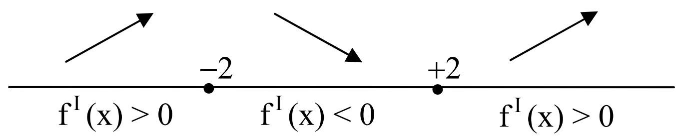
Esistendo l'asintoto orizzontale la funzione razionale fratta non può avere asintoti obliqui.

107. Determina i punti di max e di min relativi della funzione $y = x^3 - 12x$

Risposta: La funzione è una funzione razionale intera, il cui Dominio è tutto l'insieme ***R***.

$f^I(x) = 3x^2 - 12$; $f^I(x) = 0$ per $3x^2 - 12 = 0$: $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$f^I(x) > 0$ per $3x^2 - 12 > 0$ Essendo il I° coefficiente positivo e il segno della disequazione positivo $\Rightarrow$ la disequazione è soddisfatta per valori esterni ai punti -2 e $+2$.



Pertanto x = -2 è un punto di max relativo, mentre x = +2 è un punto di min relativo.

108. Utilizzando il limite del rapporto incrementale, dimostra che $D(5x^2 - 7x) = 10x - 7$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{5\cdot(x+h)^2 - 7\cdot(x+h) - (5x^2 - 7x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5\cdot(x^2 + h^2 + 2hx) - \cancel{7x} - 7h - 5x^2 + \cancel{7x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{5x^2} + 5h^2 + 10hx - 7h - \cancel{5x^2}}{h} =$$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5h^2 + 10hx - 7h}{h}$ che una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$. Dividiamo tutti i termini per h

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{5h + 10x - 7}{1} = \frac{5\cdot 0 + 10x - 7}{1} = 10x - 7 \;.$$

109. Stabilisci se la funzione $f(x)=x^2-x+1$ nell'intervallo $[-1,2]$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, calcola l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

Risposta:

$f(x)=x^2-x+1$ è una funzione razionale intera, continua e derivabile $\forall x \in R$, e quindi è continua e derivabile in $[-1,2]$.

$f(x=-1)=(-1)^2-(-1)+1 = 1+1+1 = 3$

$f(x=2)=2^2-2+1 = 4-2+1 = 3$

Le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte, pertanto esisterà almeno un punto $c \in (-1,2)$ tale che $f^I(c)=0$.

Calcolo $f^I(x)=2x-1$. Calcolo $f^I(x)=0$; $2x-1=0$; $2x=1$ e si ottiene $x=\frac{1}{2}$.