Progressioni aritmetiche

FORMULARIO

Una **progressione aritmetica** è una successione numerica tale che la differenza tra ogni termine e il suo precedente è costante. Tale differenza costante è detta **ragione**, e si indica con **d**.

In una progressione aritmetica di ragione **d**, ogni termine è uguale al suo precedente aumentato della ragione.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$

Una progressione aritmetica di ragione d è : $\begin{cases} \textbf{crescente} & se\ d > 0 \\ \textbf{decrescente} & se\ d < 0 \\ \textbf{costante} & se\ d = 0 \end{cases}$

Il termine generale di una progressione aritmetica è : $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

La relazione fra due termini di una progressione aritmetica è : $\boxed{a_r = a_s + (r-s) \cdot d}$

In una progressione aritmetica la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale alla somma dei termini estremi.

La somma dei primi n termini della progressione aritmetica è : $\boxed{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$

ESERCIZI

Esempio 1

Calcola il sesto termine di una progressione aritmetica di ragione 7 e primo termine 3 .

Soluzione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = 3 + 5 \cdot 7 = 38$.

Esempio 2

Calcola la ragione di una progressione aritmetica di 4 termini i cui estremi sono, nell'ordine, 32 e 50 .

Soluzione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_4 = a_1 + (4-1) \cdot d$; $\quad 50 = 32 + 3d$; $\quad 3d = 18$; $\quad d = 6$.

Esempio 3

Calcola il primo termine di una progressione aritmetica di ragione $\frac{5}{6}$ e ottavo termine $\frac{37}{6}$.

Soluzione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d$; $\quad \dfrac{37}{6} = a_1 + 7 \cdot \dfrac{5}{6}$; $\quad a_1 = \dfrac{37}{6} - \dfrac{35}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Esempio 4

Calcola il numero n dei termini di una progressione aritmetica di ragione -11 , primo termine -10 ed n-esimo termine -43 .

Soluzione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad -43 = -10 + (n-1) \cdot (-11)$;

$-43 = -10 - 11n + 11$; $\quad 11n = 43 - 10 + 11$; $\quad 11n = 44$; $\quad n = 4$.

Esempio 5

Calcola il settimo termine di una progressione aritmetica di ragione $5\sqrt{2}$ e quarto termine $-2\sqrt{2}$.

Soluzione

$a_r = a_s + (r-s) \cdot d$; $\quad a_7 = a_4 + (7-4) \cdot d = -2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$.

Esempio 6

Calcola il quarto termine di una progressione aritmetica di ragione $\frac{3}{2}$ e decimo termine $\frac{33}{2}$.

Soluzione

$a_r = a_s + (r-s) \cdot d$; $\quad a_{10} = a_4 + (10-4) \cdot d$; $\quad \dfrac{33}{2} = a_4 + 6 \cdot \dfrac{3}{2}$; $\quad a_4 = \dfrac{33}{2} - 9 = \dfrac{15}{2}$.

Esempio 7

Inserisci fra 18 e 46 sei numeri in modo da formare una progressione aritmetica.

Soluzione

I termini della progressione aritmetica sono in totale 8. Determiniamo la ragione:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d$; $\quad 46 = 18 + 7d$; $\quad 7d = 28$; $\quad d = 4$.

I termini della progressione aritmetica sono: 18 , 22 , 26 , 30 , 34 , 38 , 42 , 46 .

Esempio 8

Determina il numero dei termini compresi fra 22 e 50 in una progressione aritmetica di ragione 4 .

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\qquad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\qquad 50 = 22 + (n-1) \cdot 4$;

$50 = 22 + 4n - 4$; $\qquad 4n = 50 - 22 + 4$; $\qquad 4n = 32$; $\qquad n = 8$.

Ci sono 6 termini fra 22 *e* 50.

Esempio 9

Calcola la somma dei primi dieci termini di una progressione aritmetica avente ragione 3 e il cui primo termine è 5 .

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\qquad a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d \ = \ 5 + 9 \cdot 3 \ = \ 32$.

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_{10} = 10 \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 10 \cdot \dfrac{5 + 32}{2} = 5 \cdot 37 = 185$.

Esempio 10

Calcola la somma dei primi dieci multipli di 4 diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\qquad a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d \ = \ 4 + 9 \cdot 4 \ = \ 40$.

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_{10} = 10 \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 10 \cdot \dfrac{4 + 40}{2} = 5 \cdot 44 = 220$.

Esempio 11

Calcola la somma dei primi cento numeri naturali diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_{100} = 100 \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 100 \cdot \dfrac{1 + 100}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Esempio 12

Calcola la somma dei primi n numeri naturali diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_n = n \cdot \dfrac{1 + n}{2}$.

Esempio 13

Calcola la somma dei primi n numeri pari diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

$Per\ \ n = 1 \ \ \rightarrow \ \ np = 2 \cdot n = 2 \cdot 1 = 2$ $\qquad\qquad Per\ \ n = 2 \ \ \rightarrow \ \ np = 2 \cdot n = 2 \cdot 2 = 4$

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_n = n \cdot \dfrac{2 + 2n}{2} = n \cdot \dfrac{2(1+n)}{2} = n \cdot (n+1)$.

Esempio 14

Calcola la somma dei primi n numeri dispari diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

$Per\ \ n = 1 \ \ \rightarrow \ \ np = 2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $\qquad\qquad Per\ \ n = 2 \ \ \rightarrow \ \ np = 2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\qquad S_n = n \cdot \dfrac{1 + (2n-1)}{2} = n \cdot \dfrac{2n}{2} \ = \ n^2$.

Esempio 15

Calcola la somma dei primi sei termini di una progressione aritmetica avente ragione $-\frac{1}{2}$ e il cui sesto termine è 40 .

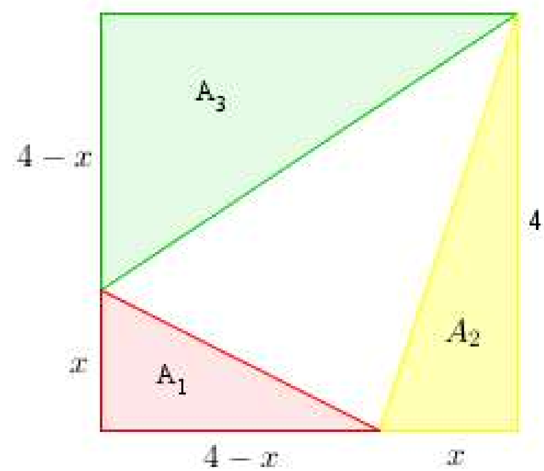
Soluzione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $\quad a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d$; $\quad 40 = a_1 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; $\quad a_1 = 40 + \frac{5}{2} = \frac{85}{2}$.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} ; \qquad S_6 = 6 \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 6 \cdot \frac{\frac{85}{2} + 40}{2} = 3 \cdot \frac{165}{2} = \frac{495}{2} .$$

Esempio 16

Nel quadrato a lato, determina il valore di x per cui le tre aree dei tre triangoli A_1 , A_2 , A_3 sono in progressione aritmetica.



Soluzione

Le tre aree sono in progressione aritmetica se:

$A_2 - A_1 = A_3 - A_2$;

$$\frac{4 \cdot x}{2} - \frac{x \cdot (4-x)}{2} = \frac{4 \cdot (4-x)}{2} - \frac{4 \cdot x}{2} ;$$

$$2x - \frac{4x - x^2}{2} = \frac{16 - 4x}{2} - 2x ;$$

$4x - 4x + x^2 = 16 - 4x - 4x$;

$x^2 + 8x - 16 = 0$;

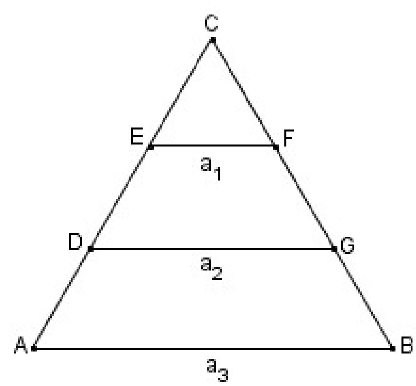
$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{32} = -4 \pm 4\sqrt{2} = \begin{matrix} x_1 = -4 - 4\sqrt{2} \\ x_2 = -4 + 4\sqrt{2} \end{matrix} .$$

Dalla figura si osserva che la progressione è crescente.

Pertanto è accettabile soltanto la soluzione positiva $x_2 = -4 + 4\sqrt{2}$.

Esempio 17

Nel triangolo equilatero a lato $\overline{AD} = \overline{D\ \ } = \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{F\ \ } = \overline{GB}$.
Dimostra che a_1 , a_2 , a_3 sono in progressione aritmetica.



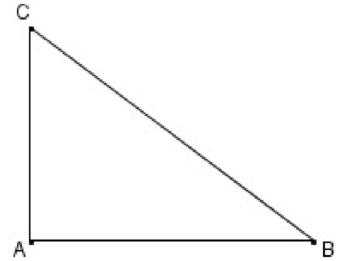
Soluzione

Ponendo $\overline{\mathrm{AD}} = x$ *si ha:*

$\mathrm{a}_1 = x$, $\quad \mathrm{a}_2 = 2x$, $\quad \mathrm{a}_3 = 3x$.

che rappresenta una progressione aritmetica di ragione x .

Esempio 18



Trova i lati di un triangolo rettangolo di area a 216, sapendo che sono in progressione aritmetica.

<u>Soluzione</u>

Poniamo $\overline{AB} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} = \frac{2\,S}{\overline{AB}} = \frac{2\cdot 216}{x} = \frac{432}{x}$

Essendo $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *in progressione aritmetica si ha:*

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BC} - \overline{AB}\ ; \qquad x - \frac{432}{x} = \overline{BC} - x\ ; \qquad \overline{BC} = 2x - \frac{432}{x}$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC *si ha:*

$$\overline{BC}^2 = \overline{A}^{\ 2} + \overline{AB}^2\ ;$$

$$\left(2x - \frac{432}{x}\right)^2 = \left(\frac{432}{x}\right)^2 + x^2\ ;$$

$$4x^2 + \left(\frac{432}{x}\right)^2 - 2\cdot 2x\cdot\frac{432}{x} = \left(\frac{432}{x}\right)^2 + x^2\ ;$$

$$4x^2 + \left(\frac{432}{x}\right)^2 - 1728 = \left(\frac{432}{x}\right)^2 + x^2\ ;$$

$$4x^2 - 1728 = x^2\ ;$$

$$4x^2 - 1728 = x^2\ ; \qquad 3x^2 = 1728\ ; \qquad x^2 = 576\ ; \qquad x_{1,2} = \begin{array}{ll} -24 & \textit{non accettabile} \\ +24 & \textit{accettabile} \end{array}$$

Pertanto $\overline{AB} = 24\,; \qquad \overline{AC} = \frac{432}{24} = 18\ ; \qquad \overline{BC} = 2\cdot 24 - \frac{432}{24} = 48 - 18 = 30\ .$

Esempio 19

La somma di quattro numeri in progressione aritmetica è 36. Calcola i quattro numeri, sapendo che il maggiore supera di 12 il minore.

<u>Soluzione</u>

$$a_4 = a_1 + 12\ ;$$

$$S_n = n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2}\ ; \qquad S_4 = 4\cdot\frac{a_1 + a_4}{2}\ ; \qquad 36 = 4\cdot\frac{a_1 + a_1 + 12}{2}\ ; \qquad 36 = 2\cdot(2a_1 + 12)\ ;$$

$$18 = 2a_1 + 12\ ; \qquad 2a_1 = 18 - 12\ ; \qquad 2a_1 = 6\ ; \qquad a_1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad a_4 = a_1 + 12 = 3 + 12 = 15\ .$$

Calcoliamo la ragione

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d\ ;$$

$$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d\ ;$$

$$15 = 3 + 3\cdot d\ ; \qquad 3\,d = 12\,; \qquad d = 4\,.$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7 \qquad\qquad a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11\ .$$

Esempio 20

In una progressione aritmetica $a_1 = -2$ e $a_4 = 0$, calcola la somma dei primi dieci termini.

<u>*Soluzione*</u>

Calcoliamo la ragione

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$;

$a_4 = a_1 + (4-1) \cdot d$;

$0 = -2 + 3 \cdot d$; $\qquad 3d = 2$; $\qquad d = \frac{2}{3}$.

$a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d$

$a_{10} = -2 + 9 \cdot \frac{2}{3} = -2 + 6 = 4$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$;

$S_{10} = 10 \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{-2+4}{2} = 5 \cdot 2 = 10.$

Esempio 21

Un'impresa edile firma un contratto per la costruzione di un edificio entro una certa data. In caso di ritardo della fine dei lavori si impegna a pagare una penale con rate mensili progressive: 500€ la prima, 700€ la seconda, 900€ la terza e così via. Quanto dovrebbe pagare complessivamente l'impresa per 8 mesi di ritardo?

<u>*Soluzione*</u>

$a_1 = 500$; $\qquad d = 200$.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$;

$a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d$;

L'ottava rata è $a_8 = 500 + 7 \cdot 200 = 1900$ € .

La somma complessiva da pagare è

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ $\qquad S_8 = 8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2} = 8 \cdot \frac{500 + 1900}{2} = 8 \cdot \frac{2400}{2} = 9600$ € .

Esempio 22

Un atleta vuole preparare il suo programma di allenamento in vista della maratona. Intende correre a giorni alterni, cominciando il primo allenamento con un percorso di 5km e aumentando progressivamente di un certo numero di kilometri a ogni allenamento, in modo da arrivare a correre 42km dopo 150 giorni. Sapendo che le distanze percorse formano una progressione aritmetica, calcola la ragione.

<u>*Soluzione*</u>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$;

$a_{75} = a_1 + (75-1) \cdot d$;

$42 = 5 + 74 \cdot d$; $\qquad 74\, d = 37$; $\qquad d = \frac{37}{74} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

La ragione $d = 0{,}5\ km$.

Esempio 23

In una progressione aritmetica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{47}$ la somma dei termini di posto dispari è 1272. Quanto vale la somma di tutti i 47 termini?

<u>*Soluzione*</u>

Ragioniamo su una progressione aritmetica più corta.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
5	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*

50

50

Come si può osservare: $a_1 + a_n = 50$ *sia per i termini di posto pari sia per i termini di posto dispari.*

I termini di posto dispari sono $5 = \frac{9}{2}$ *arrotondato per eccesso.*

I termini di posto pari sono $4 = \frac{9}{2}$ *arrotondato per difetto.*

La somma dei termini di posto dispari è:	$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 5 \cdot \dfrac{5 + 45}{2} = 125\,.$
La somma dei termini di posto pari è:	$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} = 4 \cdot \dfrac{10 + 40}{2} = 100\,.$

Quindi per calcolare la somma di tutti i 9 termini è sufficiente calcolare la somma dei termini estremi:

$$a_1 + a_n = \frac{2 \cdot S_{n\,dispari}}{n} = \frac{2 \cdot 125}{5} = 50$$

In seguito calcolare:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad\qquad S_9 = 9 \cdot \frac{a_1 + a_9}{2} = 9 \cdot \frac{50}{2} = 225\ .$$

Per risolvere il quesito proposto quindi, occorre calcolare:

$$a_1 + a_n = \frac{2 \cdot S_{n\,dispari}}{24} = \frac{2 \cdot 1272}{24} = 106 \qquad\qquad \left(24 = \frac{47}{2}\ \ arrotondato\ per\ eccesso\right)$$

In seguito calcolare:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad\qquad S_{47} = 47 \cdot \frac{a_1 + a_{47}}{2} = 47 \cdot \frac{106}{2} = 2491\ .$$

Esempio 24

$$\begin{cases} a_5 = \dfrac{1}{a_1} \\ S_5 = \dfrac{25}{3} \end{cases}$$

<u>*Soluzione*</u>

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$; $\quad \dfrac{25}{3} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + \frac{1}{a_1}}{2}$; $\quad \dfrac{25}{3} = \dfrac{5}{2} \cdot \left(\dfrac{{a_1}^2 + 1}{a_1} \right)$; $\quad \dfrac{25}{3} = \dfrac{5({a_1}^2 + 1)}{2a_1}$;

$50a_1 = 15({a_1}^2 + 1)$; $\quad 50a_1 = 15({a_1}^2 + 1)$; $\quad 50a_1 = 15{a_1}^2 + 15$; $\quad 15{a_1}^2 - 50a_1 + 15 = 0$

$3{a_1}^2 - 10a_1 + 3 = 0$; $\quad a_1 = \dfrac{5 \pm \sqrt{16}}{3} = \begin{matrix} \dfrac{5-4}{3} = \dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{matrix}$

Dovendo la progressione essere crescente occorre scartare la soluzione $a_1 = 3$ *perché altrimenti* a_5 *dovrebbe essere il suo reciproco* $\frac{1}{3}$ *e la progressione non risulterebbe crescente.*

Essendo $a_1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a_5 = 3$.

Utilizzando la formula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *si ricava la ragione:*

$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d$; $\quad 3 = \dfrac{1}{3} + 4 \cdot d$; $\quad 4\,d = 3 - \dfrac{1}{3}$; $\quad 4\,d = \dfrac{8}{3}$; $\quad d = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3}$.

In definitiva i termini sono:

$a_1 = \frac{1}{3} \qquad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \; a_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \, a_4 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \qquad a_5 = 3$.

Esempio 25

$$\begin{cases} d = 6 \\ a_1 = 5 \\ a_n = 131 \end{cases} \qquad \begin{matrix} n = ? \\ S_n = ? \end{matrix}$$

<u>*Soluzione*</u>

Utilizzando la formula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *si ricava l'indice n:*

$131 = 5 + (n-1) \cdot 6$; $\quad 131 = 5 + 6n - 6$; $\quad 6n = 132$; $\quad n = \frac{132}{6} = 22$.

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} \quad \Rightarrow \quad S_{22} = 22 \cdot \dfrac{5 + 131}{2} = 22 \cdot \dfrac{136}{2} = 22 \cdot 68 = 1496$.

Esempio 26

$$\begin{cases} S_n = 18 \\ a_1 = -1 \\ d = \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{matrix} n = ? \\ a_n = ? \end{matrix}$$

Soluzione

Occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = -1 + (n-1)\cdot \dfrac{3}{4} \\ 18 = n \cdot \dfrac{-1 + a_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = -1 + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4} \\ 36 = n \cdot (-1 + a_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{4}n - \dfrac{7}{4} \\ 36 = -n + n \cdot a_n \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ 36 = -n + n \cdot \left(\dfrac{3}{4}n - \dfrac{7}{4}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ 36 = -n + \dfrac{3}{4}n^2 - \dfrac{7}{4}n \end{cases}$$

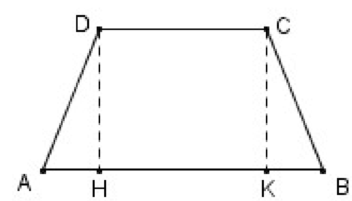
$$\begin{cases} --- \\ 36 = \dfrac{3}{4}n^2 - \dfrac{11}{4}n \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ \dfrac{3}{4}n^2 - \dfrac{11}{4}n - 36 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ 3n^2 - 11n - 144 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ n = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 1728}}{2 \cdot 3} = \dfrac{11 \pm \sqrt{1849}}{6} = \dfrac{11 \pm 43}{6} = \begin{matrix} \dfrac{11-43}{6} = -\dfrac{32}{6} = -\dfrac{16}{3} \quad \textit{non accettabile} \\ \dfrac{11+43}{6} = +\dfrac{54}{6} = 9 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ n = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = \dfrac{3}{4}\cdot 9 - \dfrac{7}{4} = \dfrac{27}{4} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{20}{4} = 5 \\ n = 9 \end{cases}$$

Esempio 27

$$\begin{cases} \overline{BC} - \overline{DC} = \overline{AB} - \overline{BC} \\ \overline{DH} = \overline{CK} = 12\sqrt{3} \\ \overline{DC} = \dfrac{1}{3}\overline{AB} \end{cases} \qquad p = ?$$



Soluzione

Poniamo $\overline{AB} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{DC} = \frac{1}{3}x$

Essendo $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{AB}$ *in progressione aritmetica si ha:*

$$\overline{BC} - \overline{DC} = \overline{AB} - \overline{BC} \ ; \qquad \overline{BC} - \frac{1}{3}x = x - \overline{BC} \ ; \qquad 2\,\overline{BC} = x + \frac{1}{3}x \ ; \qquad 2\,\overline{BC} = \frac{4}{3}x \ ; \qquad \overline{BC} = \frac{2}{3}x$$

$$\overline{KB} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = \frac{x - \frac{1}{3}x}{2} = \frac{\frac{2}{3}x}{2} = \frac{1}{3}x$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCK *si ha:*

$$\overline{BC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KB}^2 \ ; \qquad \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \left(12\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 \ ; \qquad \frac{4}{9}x^2 = 432 + \frac{1}{9}x^2 \ ;$$

$$\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^2 = 432 \ ; \qquad \frac{3}{9}x^2 = 432 \ ; \qquad x^2 = 1296 \ ; \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{1296} = \begin{matrix} -36 \ \textit{non accettabile} \\ +36 \end{matrix}$$

Pertanto $\overline{AB} = 36$; $\quad \overline{DC} = \frac{1}{3}\cdot 36 = 12$; $\quad \overline{BC} = \frac{2}{3}\cdot 36 = 24$.

In definitiva $\quad p = \overline{AB} + \overline{DC} + 2\cdot\overline{BC} = 36 + 12 + 2\cdot 24 = 96$.

Esempio 28

<u>*Soluzione*</u>

$v = v_0 + a\,t$

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	. . .
$v = v_0$	$v = v_0 + a$	$v = v_0 + 2a$	$v = v_0 + 3a$	$v = v_0 + 4a$	

La ragione vale a .

Esempio 29

Calcola la somma dei primi n multipli del 3 diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

Il primo multiplo di 3 diverso da zero è 3. L'n-esimo multiplo di 3 è 3n .

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione aritmetica si ottiene:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \; ; \qquad S_n = n \cdot \frac{3 + 3n}{2} = \frac{3}{2} n \cdot (n+1) \quad .$$

Esempio 30

Calcola la somma dei primi n multipli del 5 diversi da zero.

<u>*Soluzione*</u>

Il primo multiplo di 5 è 5. L'n-esimo multiplo di 5 è 5n .

Applicando la formula della somma dei termini di una progressione aritmetica si ottiene:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \; ; \qquad S_n = n \cdot \frac{5 + 5n}{2} = \frac{5}{2} n \cdot (n+1) \quad .$$