SUCCESSIONI E PROGRESSIONI

Esercizio 178.A1

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.
2, 5, 8, 11, 14, …

Soluzione

La differenza tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a 3.

Pertanto si tratta di una progressione aritmetica crescente di ragione 3.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3 & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *cioè* $a_n = 2 + 3(n-1) \qquad \forall n \geq 1$

Esercizio 178.A2

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.
54, 36, 24, 16, $\frac{32}{3}$, …

Soluzione

Il rapporto tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $\frac{2}{3}$.

Pertanto si tratta di una progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{2}{3}$.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = 54 \\ a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ *cioè* $a_n = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \forall n \geq 1$

Esercizio 178.A3

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.
$\frac{3}{5}, \frac{14}{15}, \frac{19}{15}, \frac{8}{5}, \frac{29}{15}, \ldots$

Soluzione

La differenza tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $\frac{1}{3}$.

Pertanto si tratta di una progressione aritmetica crescente di ragione $\frac{1}{3}$.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{5} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3} & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *cioè* $a_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{3}(n-1) \qquad \forall n \geq 1$

Esercizio 178.A4

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.
$-\frac{100}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{4}{35}, -\frac{4}{175}, \ldots$

Soluzione

Il rapporto tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $\frac{1}{5}$.

Pertanto si tratta di una progressione geometrica crescente di ragione $\frac{1}{5}$.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = -\frac{100}{7} \\ a_n = \frac{1}{5} \cdot a_{n-1} & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ *cioè* $a_n = -\frac{100}{7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 1$

Esercizio 178.A5

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{17}{2}, \frac{33}{2}\ .\ .\ .$

Soluzione

La successione non è una progressione aritmetica (la differenza fra ogni termine e il suo precedente non è costante).
La successione non è una progressione geometrica (il rapporto tra ogni termine e il suo precedente non è costante).
I numeratori sono potenze di 2 aumentate di un'unità.
Il denominatore è costante uguale a 2.

Pertanto la rappresentazione analitica è $a_n = \frac{2^n+1}{2} \quad \forall n \geq 1$

La rappresentazione per ricorsione si ottiene osservando che per ottenere il termine successivo è sufficiente raddoppiare il termine precedente e sottrarre $\frac{1}{2}$.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - \frac{1}{2} & se\ n > 1 \end{cases}$

Esercizio 178.A6

Rappresenta mediante espressione analitica e per ricorsione la seguente successione, specificando, eventualmente, se si tratta di una progressione e indicandone il tipo e la ragione.

$7\sqrt{2}\ ,\ \frac{13}{2}\sqrt{2}\ ,\ 6\sqrt{2}\ ,\ \frac{11}{2}\sqrt{2}\ ,\ 5\sqrt{2}\ .\ .\ .$

Soluzione

La differenza tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pertanto si tratta di una progressione aritmetica decrescente di ragione $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = 7\sqrt{2} \\ a_n = a_{n-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *cioè* $a_n = 7\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(n-1) \quad \forall n \geq 1$

Esercizio 178.A7

In una progressione geometrica $S_5 = \frac{605}{9}$, $q = 3$. Determina a_3.

Soluzione

Utilizzando la formula per il calcolo della somma di n termini si ha:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\ ; \quad S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}\ ; \quad \frac{605}{9} = a_1 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1}\ ; \quad \frac{605}{9} = 121 a_1\ ; \quad a_1 = \frac{605}{9} \cdot \frac{1}{121} = \frac{5}{9}\ .$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\ ; \qquad a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = \frac{5}{9} \cdot 3^2 = 5\ .$$

Esercizio 178.A8

In una progressione aritmetica $a_8 = 13$ e $a_{12} = 19$. Determina a_1 .

Soluzione

Utilizzando la relazione tra due termini di una progressione aritmetica determiniamo la ragione:

$$a_r = a_s + (r-s)\cdot d \; ; \qquad a_{12} = a_8 + (12-8)\cdot d \; ; \qquad 19 = 13 + 4d \; ; \qquad 4d = 6 \; ; \qquad d = \frac{3}{2} \, .$$

Utilizzando la relazione generale di una progressione aritmetica determiniamo il primo termine:

$$a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot\frac{3}{2} \; ; \qquad a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot\frac{3}{2} \; ; \qquad 19 = a_1 + 11\cdot\frac{3}{2} \; ; \qquad a_1 = 19 - \frac{33}{2} = \frac{5}{2}.$$

Esercizio 178.A9

Determina il numero dei termini di una progressione aritmetica in cui $a_1 = 4$ e $a_5 = 16$ $S_n = 116$.

Soluzione

Utilizzando la formula del termine n-esimo di una progressione aritmetica, determiniamo la ragione:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \; ; \qquad a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d \; ; \qquad 16 = 4 + 4d \; ; \qquad 4d = 12 \; ; \qquad d = 3 \; .$$

Impostando il sistema:

$$\begin{cases} S_n = n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \end{cases} \qquad \begin{cases} 116 = n\cdot\dfrac{4+a_n}{2} \\ a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 232 = 4n + n\cdot a_n \\ a_n = 4 + 3n - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 232 = 4n + n\cdot a_n \\ a_n = 4 + 3n - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 232 = 4n + n\cdot a_n \\ a_n = 3n + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 232 = 4n + n\cdot(3n+1) \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 232 = 4n + 3n^2 + n \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 3n^2 + 5n - 232 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+2784}}{6} = \dfrac{-5\pm\sqrt{2809}}{6} = \dfrac{-5\pm 53}{6} = \\ --- \end{cases} \quad \begin{matrix} n_1 = \dfrac{-5-53}{6} = \dfrac{-58}{6} = -\dfrac{29}{3} \\ n_2 = \dfrac{-5+53}{6} = \dfrac{+48}{6} = +8 \end{matrix}$$

Delle due soluzioni solo la seconda $n_2 = 8$ *è accettabile, perché è un numero intero positivo.*

Esercizio 178.A10

Il perimetro di un pentagono irregolare misura 80 cm e le misure dei suoi lati sono in progressione aritmetica. Calcola la lunghezza di ogni lato sapendo che la differenza tra il lato più lungo e quello più corto è di 12 cm.

Soluzione

Indichiamo con $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5$ *le misure dei tre lati del pentagono,*
con $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, $a_5 > 0$.
Trattandosi di una progressione geometrica si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} S_n = 80 \\ a_5 - a_1 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot\dfrac{a_1+a_5}{2} = 80 \\ a_5 - a_1 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ a_5 = a_1 + 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot\dfrac{a_1+a_1+12}{2} = 80 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\cdot\dfrac{2a_1+12}{2} = 80 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\cdot(2a_1+12) = 160 \\ ---- \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1 + 12 = 32 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1 = 20 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 10 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ a_5 = 10 + 12 = 22 \end{cases}$$

Calcoliamo la ragione:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \; ; \qquad a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d \; ; \qquad 22 = 10 + 4d \; ; \qquad 4d = 12 \; ; \qquad d = 3 \, .$$

In definitiva le misure dei lati sono: $a_1 = 10$, $a_2 = 13$, $a_3 = 16$, $a_4 = 19$, $a_5 = 22$.

Esercizio 178.A11

Il perimetro del triangolo ABC è lungo 57 cm e le misure dei lati sono in progressione geometrica. Sapendo che la differenza fra il lato maggiore e il minore è 15 cm, determina le lunghezze dei lati.

Soluzione

Indichiamo con a_1 , a_2 , a_3 *le misure dei tre lati del triangolo, con* $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

Trattandosi di una progressione geometrica si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 57 \\ a_3 - a_1 = 15 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \end{cases}$$

Sostituendo le ultime due espressioni nelle prime 2 equazioni si ottiene un sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 57 \\ a_1 \cdot q^2 - a_1 = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 57 \\ a_1 \cdot (q^2 - 1) = 15 \end{cases}$$

Ricaviamo a_1 *dalla seconda equazione* $(con\ q^2 - 1 \neq 0)$ *e sostituiamo l'espressione trovata nella prima equazione:*

$$\begin{cases} --- \\ a_1 = \dfrac{15}{q^2 - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{15}{q^2 - 1} \cdot (1 + q + q^2) = 57 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 15 \cdot (1 + q + q^2) = 57 \cdot (q^2 - 1) \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 + 15q + 15q^2 = 57q^2 - 57 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 42q^2 - 15q - 72 = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 14q^2 - 5q - 24 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{25 + 1344}}{28} = \dfrac{5 \mp \sqrt{1369}}{28} = \dfrac{5 \mp 37}{28} = \begin{matrix} q_1 = \dfrac{5 - 37}{28} = -\dfrac{32}{28} = -\dfrac{8}{7} \\ q_2 = \dfrac{5 + 37}{28} = +\dfrac{42}{28} = +\dfrac{3}{2} \end{matrix} \\ --- \end{cases}$$

La soluzione $q_1 = -\frac{8}{7}$ *non è accettabile, perché in questo caso i termini (misure dei lati) sarebbero negativi.*

La soluzione $q_2 = +\frac{3}{2}$ *è accettabile.*

Continuando a risolvere il sistema si ha:

$$\begin{cases} q = \dfrac{3}{2} \\ a_1 = \dfrac{15}{q^2 - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ a_1 = \dfrac{15}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{15}{\frac{9}{4} - 1} = \dfrac{15}{\frac{5}{4}} = 15 \cdot \dfrac{4}{5} = 12 \, . \end{cases}$$

In seguito si determinano:

$$a_2 = a_1 \cdot q = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \qquad e \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2 = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27 \, .$$

In definitiva le misure dei tre lati sono: $a_1 = 12\ cm \qquad a_2 = 18\ cm \qquad a_3 = 27\ cm$.

Esercizio 178.B1

Data la successione: $\begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 4} \\ \boldsymbol{a_n = \frac{1}{2} + a_{n-1}} \end{cases}$

a. **determina i primi cinque termini**
b. **determina la forma analitica**
c. **calcola $\boldsymbol{a_{200}}$.**

Soluzione

$a_1 = 4\,, \qquad a_2 = \frac{9}{2}\,, \qquad a_3 = 5\,, \qquad a_4 = \frac{11}{2}\,, \qquad a_5 = 6$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *cioè* $a_n = 4 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) \qquad \forall n \geq 1$

Il 200-esimo termine è:

$$a_{200} = 4 + (200-1) \cdot \frac{1}{2} = 4 + \frac{199}{2} = \frac{207}{2}\ .$$

Esercizio 178.B2

Dimostra che la successione il cui termine generale è $a_n = \frac{\mathbf{4n+1}}{\mathbf{n+3}}$ **è crescente.**

Soluzione

Occorre dimostrare che $\forall n \in N \quad a_n < a_{n+1}$.

Sostituendo l'espressione analitica si ottiene:

$$\frac{4n+1}{n+3} < \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+3}\ ; \qquad \frac{4n+1}{n+3} < \frac{4n+5}{n+4}\ ; \qquad \frac{4n+1}{n+3} - \frac{4n+5}{n+4} < 0\ ;$$

$$\frac{(n+4)(4n+1)-(n+3)(4n+5)}{(n+3)(n+4)} < 0\ ; \qquad \frac{4n^2+n+16n+4-4n^2-5n-12n-15}{(n+3)(n+4)} < 0$$

$$\frac{-11}{(n+3)(n+4)} < 0\ .$$

Il numeratore è negativo $\forall n \in N$.

Il denominatore è positivo $\forall n \in N$ *(perché* $n \in N$ *quindi* $n \geq 0$*)*

Pertanto la frazione è negativa $\forall n \in N$.

Pertanto la disequazione è verificata $\forall n \in N$ *e la successione è crescente.*

Esercizio 178.B3

Calcola le seguenti somme:

$a.\ \ 1+\frac{5}{2}+\frac{25}{4}+\ .\ .\ .+\frac{3125}{32}$ $\qquad$ $b.\ \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +\ \ \frac{1}{2^6}$

$c.\ \ 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +\ \ \frac{3}{2^6}$ $\qquad$ $d.\ \ 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ .\ .\ .+\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}$

Soluzione a

Il rapporto tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $\frac{5}{2}$.

Si tratta quindi di una progressione geometrica crescente di ragione $\frac{5}{2}$.

La rappresentazione analitica è

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ; \qquad a_n=1\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall n\geq 1$$

Essendo $\frac{3125}{32}=\left(\frac{5}{2}\right)^5=a_6$ *(sesto termine)*

La somma vale:

$$S_6=\underbrace{1+\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\ .\ .\ .+\left(\frac{5}{2}\right)^5}_{6\ termini}=a_1\cdot\frac{q^6-1}{q-1}=1\cdot\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^6-1}{\frac{5}{2}-1}=\frac{\frac{15625}{64}-1}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{15625-64}{64}}{\frac{3}{2}}=\frac{15561}{64}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5187}{32}$$

Soluzione b

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +\ \ \frac{1}{2^6} \qquad (7\ termini)$$

Si tratta quindi di una progressione geometrica decrescente con $a_1=1$ *e ragione* $q=\frac{1}{2}$.

$$S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\ ; \qquad S_7=1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2^7}-1}{\frac{1-2}{2}}=\frac{1-2^7}{2^7}\cdot\frac{2}{1-2}=\frac{1-2^7}{2^6\cdot(1-2)}=\frac{2^7-1}{2^6}=\frac{127}{64}.$$

Soluzione c

$$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +\ \ \frac{3}{2^6} \qquad (7\ termini)$$

Si tratta quindi di una progressione geometrica decrescente con $a_1=3$ *e ragione* $q=\frac{1}{2}$.

$$S_7=3\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7-1}{\frac{1}{2}-1}=3\cdot\frac{\frac{1}{2^7}-1}{\frac{1-2}{2}}=3\cdot\frac{1-2^7}{2^7}\cdot\frac{2}{1-2}=3\cdot\frac{1-2^7}{2^6\cdot(1-2)}=3\cdot\frac{2^7-1}{2^6}=\frac{381}{64}.$$

Soluzione d

Il rapporto tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a $\frac{1}{2}$.

Si tratta quindi di una progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{1}{2}$.

La rappresentazione analitica è

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\,; \qquad a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall n \geq 1$$

Essendo $\frac{3}{2^n} = a_{n+1}$ *(*$n+1$*-esimo termine)*

La somma vale:

$$S_{n+1} = \underbrace{3 + \frac{3}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ . \ . \ . + \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^n}}_{n+1 \text{ termini}} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{\frac{1 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot (-2) = 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{2 \cdot 2^n} \cdot (-2) = -3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{2^n} = 3 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

Mentre la somma dei primi ***n*** *termini della progressione è :*

$$S_n = 3 + \frac{3}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ . \ . \ . + \frac{3}{2^{n-1}} = 3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{2^n} \cdot (-2) = -3 \cdot \frac{1 - 2^n}{2^{n-1}} = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}\,.$$