Studio del grafico della funzione: $\boxed{f(x) = -5x^3 \cdot e^{-2x}}$

1. Dominio

   $f(x)$ è una funzione trascendente. Essa è definita e continua in $D_f = (-\infty, +\infty)$.

2. Simmetrie

   $f(x)$ non presenta simmetrie evidenti. Infatti:

   $$f(-x) = -5 \cdot (-x)^3 \cdot e^{-2\cdot(-x)} = +5x^3 \cdot e^{2x} \neq \begin{cases} +f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

   $f(x)$ *non è né pari* (simmetrica rispetto all'asse y) *né dispari* (simmetrica rispetto all'origine).

3. Intersezioni con gli assi cartesiani

   $f(x)$ interseca gli assi cartesiani solo nel punto $O(0;0)$. Infatti:

   $$\begin{cases} y = -5x^3 \cdot e^{-2x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -5 \cdot 0^3 \cdot e^{-2\cdot 0} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} y = -5x^3 \cdot e^{-2x} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^3 \cdot e^{-2x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} 5x^3 = 0 \\ e^{-2x} = 0 \end{cases} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ impossibile \end{cases} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

4. Segno di f (x)

   $f(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$

   $f(x) < 0$ in $(0, +\infty)$

   Infatti: $-5x^3 \cdot e^{-2x} > 0$; $\quad \begin{matrix} -5x^3 > 0 & x < 0 \\ e^{-2x} > 0 & \forall x \in R \end{matrix} \quad x < 0$

5. Limiti ed asintoti

   $$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{-5x^3}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{0^+} = (-\infty \cdot 0^+) = ?$$

   $$\lim_{x\to+\infty} -5x^3 \cdot e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{5x^3}{e^{2x}}$$ Applicando il teorema di de L'Hôpital si ha:

   $$\lim_{x\to+\infty} -\frac{5x^3}{e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} -\frac{15x^2}{2 \cdot e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} -\frac{30x}{2 \cdot 2 \cdot e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} -\frac{30}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} -\frac{15}{4 \cdot \underbrace{e^{2x}}_{+\infty}} = 0^- .$$

   Pertanto il semiasse positivo delle ascisse $y = 0$ è asintoto orizzontale destro per la curva.

   $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{-5x^3}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{+\infty} = +\infty$. Non esiste l'asintoto orizzontale sinistro. Verifichiamo se esiste quello obliquo.

   $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^3 \cdot e^{-2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-5x^2}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{+\infty} = -\infty$. Pertanto non esiste l'asintoto obliquo a sinistra.

6. Derivata prima

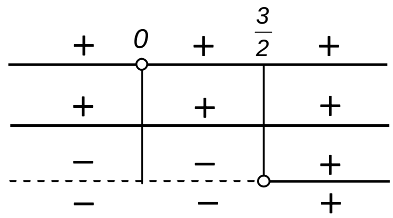
   $$f'(x) = -5 \cdot \left[3x^2 \cdot e^{-2x} + x^3 \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right)\right] = -5 \cdot \left[3x^2 \cdot e^{-2x} - 2x^3 \cdot e^{-2x}\right] = 5x^2 \cdot e^{-2x} \cdot [2x - 3].$$

7. <u>Zeri della derivata prima</u>

$$f^{I}(x)=0\,;\quad 5x^2\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x-3\right]=0\,;\qquad \begin{array}{ll} 5x^2=0 & x=0\ \ \text{radice doppia} \\ e^{-2x}=0 & \text{impossibile} \\ 2x-3=0 & x=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

8. <u>Segno della derivata prima</u>

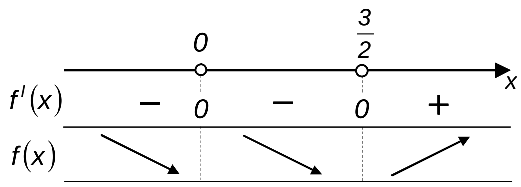
$$f^{I}(x)>0\,;\quad 5x^2\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x-3\right]>0\,;\qquad \begin{array}{ll} 5x^2>0 & \forall x\neq 0 \\ e^{-2x}>0 & \forall x\in R \\ 2x-3>0 & x>\dfrac{3}{2} \end{array}$$



Dallo schema a lato si deduce che $f(x)$ ha:
per $x=0$ un punto di flesso a tangente orizzontale
per $x=\dfrac{3}{2}$ un punto di minimo relativo, e risulta:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot e^{-2\cdot\frac{3}{2}}=-5\cdot\frac{27}{8}\cdot e^{-3}=-\frac{135}{8\cdot e^3}\cong-0{,}84$$

Il punto di minimo relativo ha coordinate: $M=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{135}{8\cdot e^3}\right)$



9. <u>Derivata seconda</u>

$$f^{II}(x)=10x\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x-3\right]+5x^2\cdot\left(-2e^{-2x}\right)\cdot\left[2x-3\right]+5x^2\cdot e^{-2x}\cdot 2=$$

$$=e^{-2x}\cdot\left[10x\cdot\left[2x-3\right]+5x^2\cdot\left[-4x+6\right]+10x^2\right]\ =\ e^{-2x}\cdot\left[20x^2-30x-20x^3+30x^2+10x^2\right]=$$

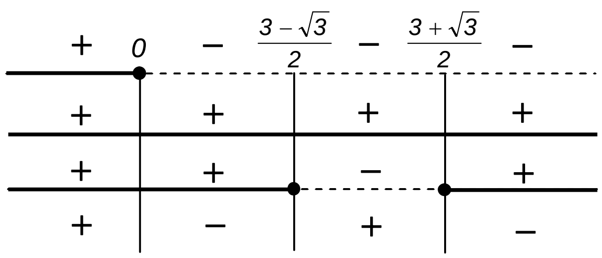
$$=e^{-2x}\cdot\left[-20x^3+60x^2-30x\right]\ =\ -10x\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x^2-6x+3\right].$$

10. <u>Zeri della derivata seconda</u>

$$f^{II}(x)=0\,;\quad -10x\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x^2-6x+3\right]=0\,;\qquad \begin{array}{ll} -10x=0 & x=0 \\ e^{-2x}=0 & \text{impossibile} \\ 2x^2-6x+3=0 & \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

11. <u>Segno della derivata seconda</u>

$$f^{II}(x)>0\,;\quad -10x\cdot e^{-2x}\cdot\left[2x^2-6x+3\right]>0\,;\qquad \begin{array}{ll} -10x>0 & x<0 \\ e^{-2x}>0 & \forall x\in D_f \\ 2x^2-6x+3>0 & x<\dfrac{3-\sqrt{3}}{2};\ x>\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \end{array}$$



$f(x)$ volge la concavità verso l'alto in: $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$

$f(x)$ volge la concavità verso il basso in: $\left(0,\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right).$

Pertanto, oltre al punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 0$, la curva ha due flessi a tangente obliqua in $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}64$ e $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cong 2{,}37$, e risulta:

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = -5 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot e^{-2\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{5}{8}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)^3 \cdot e^{\sqrt{3}-3} \cong -0{,}36 \quad \Rightarrow \quad F\,(0{,}64; -0{,}36)$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = -5 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot e^{-2\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}} = -\frac{5}{8}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)^3 \cdot e^{-\left(\sqrt{3}+3\right)} \cong -0{,}58 \quad \Rightarrow \quad G\,(2{,}37; -0{,}58).$$

12.Massimi e minimi assoluti

La funzione è limitata inferiormente, (*punto di minimo assoluto in* $M = \left(\frac{3}{2}; -\frac{135}{8\cdot e^3}\right)$*),*

ma non è limitata superiormente.

13.Grafico