Studiare il grafico della funzione $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} + 4x$

1. Dominio di esistenza: $1-x^2 \geq 0$; $1-x^2 = 0$; $x = \pm 1$; $\Rightarrow$ $-1 \leq x \leq +1$ cioè $C.E. = [-1,+1]$

2. Intersezione con gli assi:

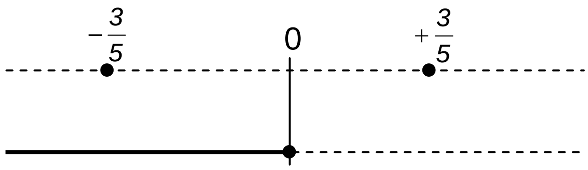
$$\begin{cases} y = 3\sqrt{1-x^2} + 4x \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3\sqrt{1-0^2} + 4 \cdot 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \cdot 1 + 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(0; 3)$$

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{1-x^2} + 4x \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\sqrt{1-x^2} + 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo: $3\sqrt{1-x^2} + 4x = 0$ si ha: $3\sqrt{1-x^2} = -4x$; $\sqrt{1-x^2} = -\frac{4}{3}x$;

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 \\ -\frac{4}{3}x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x^2 = \frac{16}{9}x^2 \\ \frac{4}{3}x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9-9x^2 = 16x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9-9x^2-16x^2 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9-25x^2 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{9}{25} \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \pm\frac{3}{5} \\ x \leq 0 \end{cases}$$



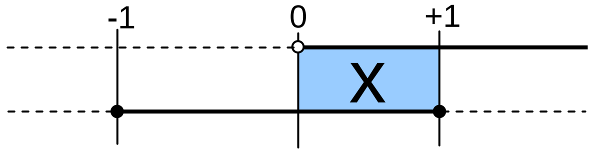
$\Rightarrow$ $x = -\frac{3}{5}$.

Ritornando al sistema $\begin{cases} 3\sqrt{1-x^2} + 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{3}{5}; 0\right)$.

3. Segno della funzione: $f(x) > 0$ **:**

$3\sqrt{1-x^2} + 4x > 0$; $\sqrt{1-x^2} > -\frac{4}{3}x$; **A** $\begin{cases} -\frac{4}{3}x < 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\cup$ **B** $\begin{cases} -\frac{4}{3}x \geq 0 \\ 1-x^2 > \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 \end{cases}$

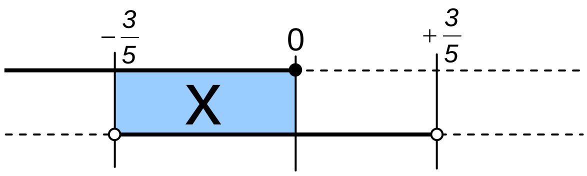
Risolvendo il sistema **A** si ha: $\begin{cases} -\frac{4}{3}x < 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq x \leq +1 \end{cases}$



Risolvendo il sistema **B** si ha: $\begin{cases} -\frac{4}{3}x \geq 0 \\ 1-x^2 > \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 1-x^2 > \frac{16}{9}x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 9-9x^2 > 16x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ 9-25x^2 > 0 \end{cases}$

Risolvendo la disequazione: $9-25x^2 > 0$; $9-25x^2 = 0$; $x = \pm\frac{3}{5}$; $\Rightarrow$ $-\frac{3}{5} < x < +\frac{3}{5}$

Ritornando al sistema **B** : $\begin{cases} x \leq 0 \\ 9-25x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ -\frac{3}{5} < x < +\frac{3}{5} \end{cases}$



In definitiva: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \left(0 < x \le 1 \ \cup \ -\frac{3}{5} < x \le 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{5} < x \le 1$

Pertanto $f(x) > 0$ per $-\frac{3}{5} < x \le 1$ mentre $f(x) < 0$ per $-1 \le x < -\frac{3}{5}$

4. Andamento della curva agli estremi di definizione

Essendo il $C.E. = [-1,+1]$ la funzione agli estremi di definizione esiste e vale:

$$f(-1) = 3\sqrt{1-(-1)^2} + 4\cdot(-1) = 3\sqrt{1-1} - 4 = 3\cdot 0 - 4 = -4 \quad \Rightarrow \quad C(-1; -4)$$

$$f(+1) = 3\sqrt{1-(+1)^2} + 4\cdot(+1) = 3\sqrt{1-1} + 4 = 3\cdot 0 + 4 = +4 \quad \Rightarrow \quad D(+1; +4)$$

Pertanto la curva non ha asintoti di alcun genere.

5. Derivata prima

$$f'(x) = 3\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 4 = \frac{-3x}{\sqrt{1-x^2}} + 4 = \frac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

6. Punti di non derivabilità

Il dominio della derivata prima è: $1 - x^2 > 0$; $1 - x^2 = 0$; $x = \pm 1$; $\Rightarrow$ $-1 < x < +1$.

Pertanto la derivata prima non è definita nei punti $x = \pm 1$. Pertanto in tali punti la funzione non è derivabile.

Per la corretta rappresentazione grafica è indispensabile conoscere la direzione della retta tangente in tali punti.

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overbrace{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}^{+3}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +1^-} f'(x) = \lim_{x \to +1^-} \frac{\overbrace{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}^{-3}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{0^+}} = -\infty$$

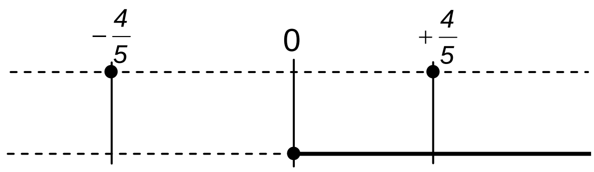
Pertanto nei punti $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$ le rette tangenti risultano essere parallele all'asse delle y .

7. Zeri della Derivata prima

$$f'(x) = 0 \ ; \quad \frac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ ; \quad -3x + 4\sqrt{1-x^2} = 0 \quad ; \quad 4\sqrt{1-x^2} = 3x \ ; \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{3}{4}x$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 \\ \frac{3}{4}x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - x^2 = \frac{9}{16}x^2 \\ \frac{3}{4}x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 - 16x^2 = 9x^2 \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 - 25x^2 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{16}{25} \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \pm\frac{4}{5} \\ x \ge 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad x = +\frac{4}{5} \ .$$

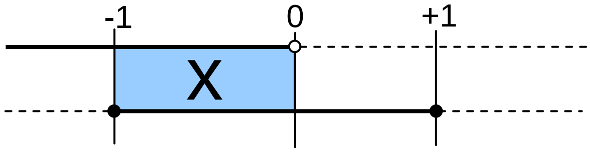
8. Segno della Derivata prima: $f'(x) > 0$;

$\dfrac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} > 0$; effettuando il prodotto dei segni: $\begin{array}{ll} N > 0 \ : & -3x + 4\sqrt{1-x^2} > 0 \\ D > 0 \ : & \sqrt{1-x^2} > 0 \end{array}$ **(*)**

Studiando il segno del numeratore: $N > 0$ **;** $-3x + 4\sqrt{1-x^2} > 0$; $4\sqrt{1-x^2} > 3x$; $\sqrt{1-x^2} > \dfrac{3}{4}x$;

Tale disequazione equivale ai due sistemi: **A** $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x < 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\bigcup$ **B** $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x \geq 0 \\ 1 - x^2 > \left(\dfrac{3}{4}x\right)^2 \end{cases}$

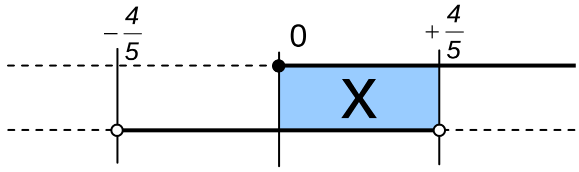
Risolvendo il sistema **A** si ha: $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x < 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ -1 \leq x \leq +1 \end{cases}$



Risolvendo il sistema **B** si ha: $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x \geq 0 \\ 1 - x^2 > \left(\dfrac{3}{4}x\right)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 > \dfrac{9}{16}x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 16 - 16x^2 > 9x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 16 - 25x^2 > 0 \end{cases}$

Risolvendo la disequazione: $16 - 25x^2 > 0$; $16 - 25x^2 = 0$; $x = \pm\dfrac{4}{5}$; $\Rightarrow$ $-\dfrac{4}{5} < x < +\dfrac{4}{5}$

Ritornando al sistema **B** : $\begin{cases} x \geq 0 \\ 16 - 25x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\dfrac{4}{5} < x < +\dfrac{4}{5} \end{cases}$

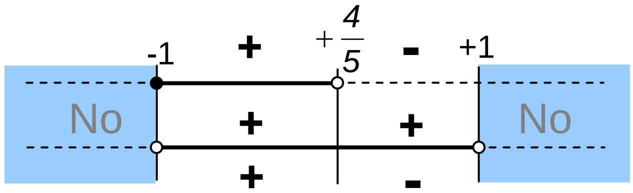


In definitiva: **A** $\bigcup$ **B** $\Leftrightarrow$ $\left(-1 \leq x < 0 \ \bigcup \ 0 \leq x < +\dfrac{4}{5} \right)$ $\Leftrightarrow$ $-1 \leq x < +\dfrac{4}{5}$

Studiando il segno del denominatore: $D > 0$; $\sqrt{1-x^2} > 0$; $1 - x^2 > 0$; $-1 < x < +1$.

Ritornando al prodotto dei segni iniziale **(*)** si ha:

$\begin{array}{lll} N > 0 \ : & -3x + 4\sqrt{1-x^2} > 0 & -1 \leq x < +\dfrac{4}{5} \\ D > 0 \ : & \sqrt{1-x^2} > 0 & -1 < x < +1 \end{array}$

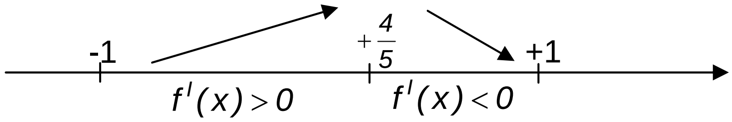


Pertanto $f'(x) > 0$ per $-1 < x < +\dfrac{4}{5}$ mentre $f'(x) < 0$ per $+\dfrac{4}{5} < x < 1$

Si può concludere che per $x = \dfrac{4}{5}$

si ha un punto di Max relativo.

L'ordinata del punto di massimo relativo è:



$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 3\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} + 4\cdot\frac{4}{5} = 3\sqrt{1-\frac{16}{25}} + \frac{16}{5} = 3\sqrt{\frac{9}{25}} + \frac{16}{5} = 3\cdot\frac{3}{5} + \frac{16}{5} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5.$$

$\Rightarrow$ $M\left(\dfrac{4}{5}; 5\right)$ è un punto di Max relativo. Esso risulta essere anche il massimo assoluto della funzione.

9. Derivata seconda

$$\frac{-3x+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{\left(-3+4\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}-\left(-3x+4\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-3-\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+\left(-3x+4\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\frac{-3\sqrt{1-x^2}-4x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{-3x^2+4x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{-3\sqrt{1-x^2}-4x+\frac{-3x^2+4x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\frac{-3\cdot\left(1-x^2\right)-4x\sqrt{1-x^2}-3x^2+4x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\frac{-3\cdot\left(1-x^2\right)-3x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\frac{-3+3x^2-3x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{-3}{\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,.$$

10. Zeri della Derivata seconda

$f''(x)=0$; $\frac{-3}{\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}=0$; $-3=0$ $\Leftrightarrow$ La derivata seconda non si annulla mai

11. Segno della Derivata seconda: $f''(x)>0$;

$\frac{-3}{\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}>0$; effettuando il prodotto dei segni:

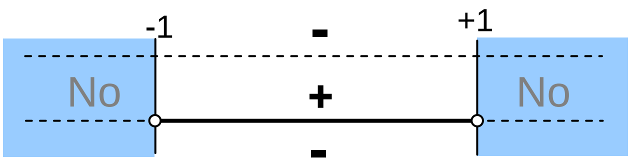
$$\begin{array}{ll} N>0\ : & -3>0 \\ D>0\ : & \left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}>0 \end{array}\quad \textbf{(*)}$$

Il numeratore $N>0$; $-3>0$ $\forall x\in R$

Il denominatore $D>0$ **;** $\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}>0$ **;** $\begin{array}{ll} 1-x^2>0 & -1<x<+1 \\ \sqrt{1-x^2}>0 & -1<x<+1 \end{array}$ $\quad -1<x<+1$

Ritornando al prodotto dei segni iniziale **(*)** si ha:

$$\begin{array}{lll} N>0\ : & -3>0 & \forall x\in R \\ D>0\ : & \left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}>0 & -1<x<+1 \end{array}$$



La derivata seconda è sempre negativa. Pertanto la curva volge la concavità sempre verso il basso

11. Non ci sono punti di flesso.

12. Il condominio della funzione è l'intervallo $[-4;5]$.

13. Il grafico della funzione è pertanto quello riportato sotto: