Studio del grafico della funzione: $\boxed{f(x)=\dfrac{3x-x^2}{x-4}}$

1. Dominio

$f(x)$ è una funzione algebrica razionale fratta di II° grado. Essa è definita e continua in $D_f=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.
Infatti dalla condizione: $x-4\neq 0$ si ha: $x\neq 4$.

2. Simmetrie

$f(x)$ non presenta simmetrie evidenti. Infatti:

$$f(-x)=\frac{3\cdot(-x)-(-x)^2}{(-x)-4}=\frac{-3x-x^2}{-x-4}=\frac{-(3x+x^2)}{-(x+4)}=\frac{3x+x^2}{x+4}\neq\begin{cases}+f(x)\\-f(x)\end{cases}$$

$f(x)$ non è né pari (simmetrica rispetto all'asse y) né dispari (simmetrica rispetto all'origine).

3. Intersezioni con gli assi cartesiani

$f(x)$ interseca gli assi cartesiani nei punti: $O(0;0)$ e $A(3;0)$. Infatti:

$$\begin{cases}y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}\\x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\dfrac{3\cdot0-0^2}{0-4}\\x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$$

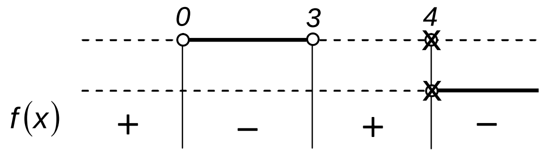
$$\begin{cases}y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{3x-x^2}{x-4}=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-x^2=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x\cdot(3-x)=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

4. Segno di f (x)

$f(x)>0$ in $(-\infty,0)\cup(3,4)$ $\qquad$ $f(x)<0$ in $(0,3)\cup(4,+\infty)$.

Infatti:

$f(x)>0\,;\quad \dfrac{3x-x^2}{x-4}>0\qquad \begin{matrix}3x-x^2>0\\x-4>0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0<x<3\\x>4\end{matrix}$



5. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to4^-}\frac{\overbrace{3x-x^2}^{\to -4}}{\underbrace{x-4}_{\to 0^-}}=+\infty\qquad\qquad \lim_{x\to4^+}\frac{\overbrace{3x-x^2}^{\to -4}}{\underbrace{x-4}_{\to 0^+}}=-\infty$$

Pertanto la retta verticale $x=4$ è un asintoto verticale destro per la curva.

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-x^2}{x-4}=\frac{\infty}{\infty}=?$ Dividendo tutti i termini per x si ha: $\displaystyle=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-x}{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}=\mp\infty$.

Pertanto la curva non ha asintoti orizzontali.

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo $y=mx+q$.

$\displaystyle m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x-x^2}{x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-x^2}{x^2-4x}=$ $\qquad$ Dividendo tutti i termini per x^2 si ha:

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}-1}{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}=-1\,.$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{3x - x^2}{x - 4} - (-1x) \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{3x - x^2}{x - 4} + x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x - x^2 + x^2 - 4x}{x - 4} =$$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x - 4}$ Dividendo tutti i termini per x si ha: $= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{1 - \frac{4}{x}} = -1$.

Pertanto la retta $y = -x - 1$ è un asintoto obliquo per la curva .

6. Derivata prima

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x) \cdot (x - 4) - (3x - x^2) \cdot 1}{(x - 4)^2} = \frac{3x - 12 - 2x^2 + 8x - 3x + x^2}{(x - 4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2} .$$

Il dominio della derivata prima $f'(x)$ coincide con il dominio della funzione $f(x)$.

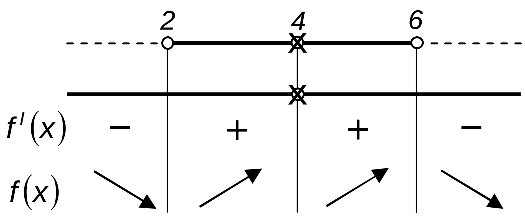
7. Zeri della derivata prima

$$f'(x) = 0 ; \quad \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2} = 0 ; \quad -x^2 + 8x - 12 = 0 ; \quad x^2 - 8x + 12 = 0 ;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 12}}{1} = 4 \mp 2 = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{array} \right.$$

8. Segno della derivata prima

$$f'(x) > 0 ; \quad \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2} > 0 \quad \begin{array}{ll} -x^2 + 8x - 12 > 0 & 2 < x < 6 \\ (x - 4)^2 > 0 & \forall x \in D_f \end{array}$$



Pertanto $f'(x) > 0$ negli intervalli $(2, 4) \cup (4, 6)$,
mentre $f'(x) < 0$ negli intervalli $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.

Ne segue che $x = 2$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 6$ è un punto di massimo relativo.

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2 - 2^2}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad f(6) = \frac{3 \cdot 6 - 6^2}{6 - 4} = \frac{-18}{2} = -9$$

Il punto di minimo relativo ha coordinate: $M = (2; -1)$. Il punto di massimo relativo ha coordinate: $N = (6; -9)$.

9. Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{(-2x + 8) \cdot (x - 4)^2 - (-x^2 + 8x - 12) \cdot 2 \cdot (x - 4)}{(x - 4)^4} = \frac{(x - 4) \cdot [(-2x + 8) \cdot (x - 4) - 2 \cdot (-x^2 + 8x - 12)]}{(x - 4)^4} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x + 8x - 32 + 2x^2 - 16x + 24}{(x - 4)^3} = \frac{-8}{(x - 4)^3} .$$

10. Zeri della derivata seconda

$f''(x) = 0 ; \quad \frac{-8}{(x - 4)^3} = 0 ; \quad -8 = 0 ;$ impossibile.

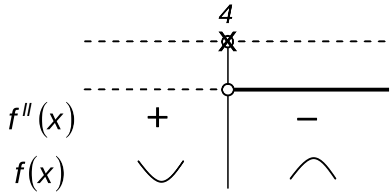
La curva non ha punti di flesso.

11. Segno della derivata seconda

$f''(x) > 0$; $\quad \dfrac{-8}{(x-4)^3} > 0$;

$-8 > 0 \qquad mai \qquad mai$

$(x-4)^3 > 0 \qquad x-4 > 0 \qquad x > 4$



$f(x)$ volge la concavità verso l'alto in: $(-\infty, 4)$.

$f(x)$ volge la concavità verso il basso in: $(4, +\infty)$.

12. Massimi e minimi assoluti

La funzione non è limitata. Non ha un minimo assoluto e non ha un massimo assoluto.

Il codominio della funzione è: $I_f = (-\infty,-9] \cup [-1,+\infty)$

13. Grafico