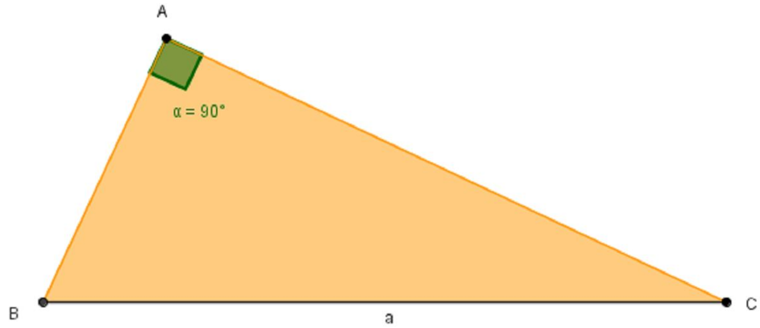
Tra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa a , trovare quello di area massima.



Soluzione 1

Posto $\overline{AB} = x$ si ha: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - x^2}$

con $0 \le x \le a$.

La funzione da rendere massima è:

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Agli estremi $x = 0$ e $x = a$ il triangolo degenera nell'ipotenusa a .

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot (a^2 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2a^2 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

$$S'(x) = 0 \ ; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \ ; \quad a^2 - 2x^2 = 0 \ ; \quad \left\langle \begin{array}{l} x = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \quad \textit{non accettabile} \\ x = +\dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Essendo:

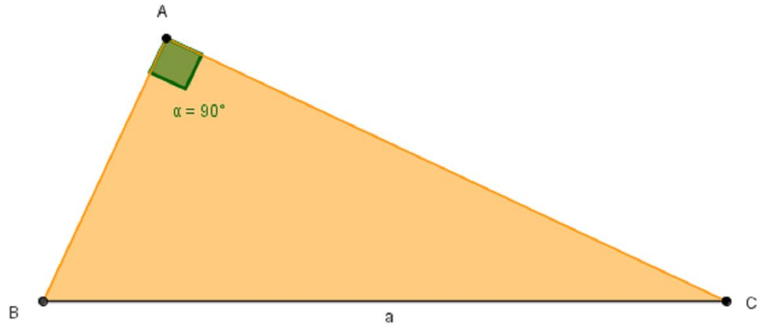
$$\left| \begin{array}{l} S(0) = \dfrac{1}{2} 0 \cdot \sqrt{a^2 - 0^2} = 0 \\ S(a) = \dfrac{1}{2} a \cdot \sqrt{a^2 - a^2} = 0 \\ S\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{a^2}{4} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Il Massimo assoluto è } M = \dfrac{a^2}{4} \\ \text{assunto nel punto } x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right|$$

Infatti: $S\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^2}{4}$

Per $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ l'altro cateto: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Pertanto, fra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa a , quello di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.

Soluzione 2



Posto $\overline{AB} = x$ si ha: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - x^2}$

con $0 \le x \le a$.

La funzione da rendere massima è:

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$$

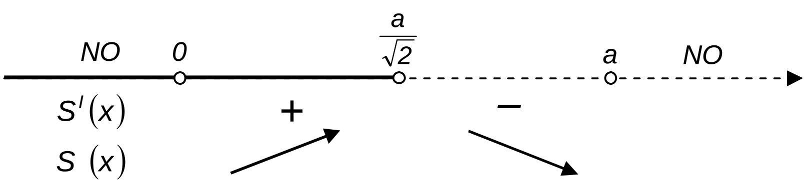
Agli estremi $x = 0$ e $x = a$ il triangolo degenera nell'ipotenusa a.

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot (a^2 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2a^2 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

$$S'(x) = 0 \; ; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \; ; \quad a^2 - 2x^2 = 0 \; ; \quad x = \mp \frac{a}{\sqrt{2}} .$$

$$S'(x) > 0 \; ; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} > 0 \; ; \quad \begin{array}{l} a^2 - 2x^2 > 0 \\ \sqrt{a^2 - x^2} > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{a}{\sqrt{2}} < x < +\frac{a}{\sqrt{2}} \\ \forall x \in D_{S(x)} \end{array} \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} < x < +\frac{a}{\sqrt{2}}$$



Il punto di massimo si ha per: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Per $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ l'altro cateto: $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Pertanto, fra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa a, quello di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.