Il minimo assoluto di una funzione $f(x)$ in un intervallo D è il più piccolo dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo D.

Il massimo assoluto di una funzione $f(x)$ in un intervallo D è il più grande dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo D

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$	$\Rightarrow$	$f(x)$ è dotata in $[a,b]$ di minimo assoluto e di massimo assoluto.

Al contrario, se la funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, cioè se essa non è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, essa può anche non essere dotata di valore minimo e di valore massimo.

In generale, la ricerca dei punti di massimo e di minimo assoluto di una funzione $f(x)$ va effettuata tra:

1. gli estremi del dominio D di $f(x)$
2. i punti interni al dominio D in cui $f'(x) = 0$
3. i punti in cui la funzione $f(x)$ non è derivabile.

I principali casi sono i seguenti:

<u>*1 - Funzione continua in un intervallo chiuso e limitato*</u>

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $D = [a,b]$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.	$\Rightarrow$	Il minimo assoluto m [il massimo assoluto M] è il più piccolo [il più grande] tra i valori: $f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$

<u>*2 - Funzione continua in un intervallo limitato e aperto*</u>

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo limitato e aperto $D =]a,b[$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile

Se m è il più piccolo tra i valori: $f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim_{x \to a^+} f(x)$ $m \le \lim_{x \to b^-} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $M \ge \lim_{x \to b^-} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

<u>*3 - Funzione continua in un intervallo illimitato*</u>

A. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $D =]-\infty, +\infty[$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.

Se m è il più piccolo tra i valori: $f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim_{x \to -\infty} f(x)$ $m \le \lim_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim_{x \to -\infty} f(x)$ $M \ge \lim_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

B. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $D = [a, +\infty[$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.

Se m è il più piccolo tra i valori: $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

C. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $D =]a, +\infty[$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.

Se m è il più piccolo tra i valori: $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\quad m \le \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\quad M \ge \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

D. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $D =]-\infty, b]$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.

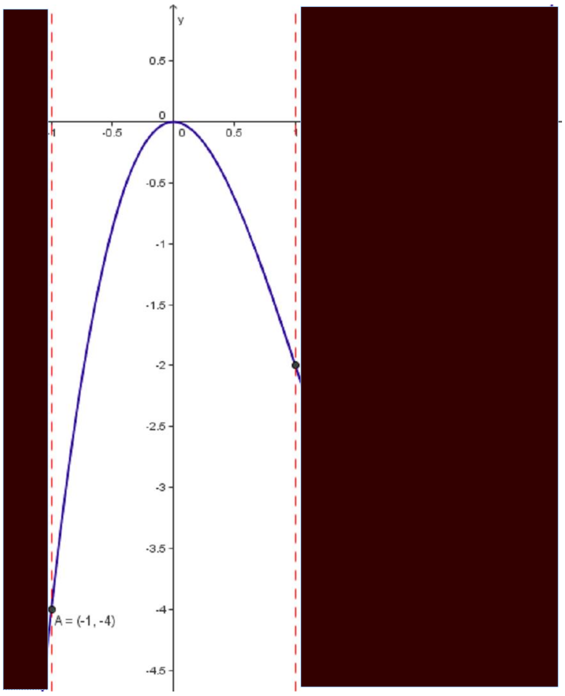
Se m è il più piccolo tra i valori: $f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

E. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo illimitato $D =]-\infty, b[$ e siano $x_1, x_2, ..., x_n$ i punti interni a D in cui $f'(x) = 0$ oppure $f(x)$ non sia derivabile.

Se m è il più piccolo tra i valori: $f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $m \le \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ $\quad m \le \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	m è il minimo assoluto
Se M è il più grande tra i valori: $f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \dots, f(x_n)$ e $M \ge \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ $\quad M \ge \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\Rightarrow$	M è il massimo assoluto

Esempio 1

Determinare il minimo assoluto m e il massimo assoluto M della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ nell'intervallo $[-1,1]$.



<u>Soluzione</u>

La funzione è continua in $[-1,1]$.

La sua derivata è: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0$ per $3x^2 - 6x = 0$; $x \cdot (3x - 6) = 0$; $\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

$x = 2$ non è accettabile perché non appartiene all'intervallo $[-1,1]$.

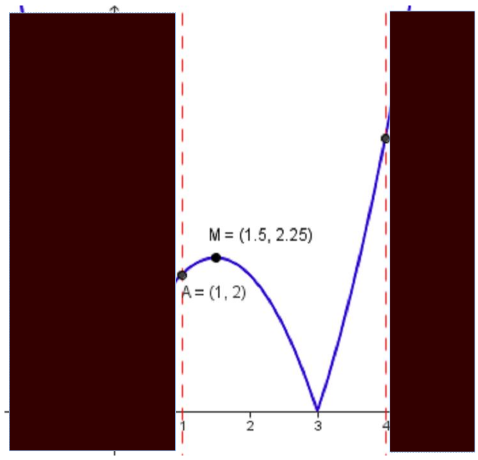
Il minimo assoluto m e il massimo assoluto M sono da ricercarsi pertanto, tra i valori: $f(-1),\quad f(1),\quad f(0)$.

Essendo:

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -4$ $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$ $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$	$\Rightarrow$	Il minimo assoluto è $m = -4$ assunto nel punto $x = -1$ Il Massimo assoluto è $M = 0$ assunto nel punto $x = 0$

Esempio 2

Determinare il minimo assoluto m e il massimo assoluto M della funzione $f(x) = \left| x^2 - 3x \right|$ nell'intervallo $[1,4]$.



<u>Soluzione</u>

La funzione $f(x) = \left| x^2 - 3x \right| = \begin{cases} x^2 - 3x & per \quad x \le 0 \;\; e \;\; x \ge 3 \\ -x^2 + 3x & per \quad 0 < x < 3 \end{cases}$

Tenendo conto dell'intervallo $[1,4]$ si ha:

$$f(x) = \left| x^2 - 3x \right| = \begin{cases} x^2 - 3x & per \quad 3 \le x \le 4 \\ -x^2 + 3x & per \quad 1 \le x < 3 \end{cases}$$

La funzione è continua $\forall x \in [1,4]$.

Infatti $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left| x^2 - 3x \right| = 0$ e $f(3) = 0$.

La sua derivata è: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & per \quad 3 \le x \le 4 \\ -2x + 3 & per \quad 1 \le x < 3 \end{cases}$

Essendo

$f'_-(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-2x + 3) = -3$ $f'_+(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 3) = +3$	$\Rightarrow$	la funzione $f(x)$ è derivabile $\forall x \in [1,4]$, escluso il punto $x = 3$, in cui ha un punto angoloso.

Essendo inoltre $f^{I}(x)=0$ per $|2x-3|=0$; $x=\dfrac{3}{2}$.

Il minimo assoluto m e il massimo assoluto M sono da ricercarsi pertanto, tra i valori:

$f(1),\quad f(3),\quad f(4),\quad f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

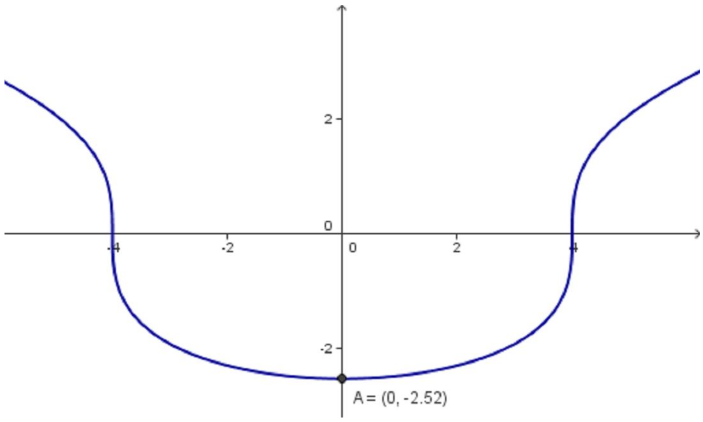
Essendo:

$f(1)=-1^2+3\cdot 1=2$ $f(3)=3^2-3\cdot 3=0$ $f(4)=4^2-3\cdot 4=4$ $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{3}{2}=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}=$ $=\dfrac{-9+18}{4}=\dfrac{9}{4}=2{,}25$	$\Rightarrow$	Il minimo assoluto è $m=0$ assunto nel punto $x=3$ Il Massimo assoluto è $M=4$ assunto nel punto $x=4$

Esempio 3

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-16}$ per $x\in R$.

Soluzione



La funzione è continua $\forall x\in R$.

La sua derivata è: $f^{I}(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-16\right)^2}}$.

Il campo di derivabilità della funzione $f(x)$ è:
$D_{f^I}=R-\{-4,+4\}$.

$f^{I}(x)=0$ per $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-16\right)^2}}=0$; $x=0$.

$f(0)=\sqrt[3]{0^2-16}=-\sqrt[3]{16}\cong -2{,}52$ $\qquad f(-4)=\sqrt[3]{(-4)^2-16}=0$ $\qquad$ e $\qquad f(4)=\sqrt[3]{4^2-16}=0$

Inoltre i limiti: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-16}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-16}=+\infty$.

Pertanto la funzione ha in R minimo assoluto $m=-\sqrt[3]{16}$, assunto per $x=0$.

Mentre la funzione non ha massimo assoluto.

Osservazioni importanti

La ricerca del min e del max assoluto di una funzione può risultare semplificata sfruttando le seguenti osservazioni:

1. Le funzioni $f(x)$ e $f(x)+c$ assumono il min e il max assoluto negli stessi punti.
2. Le funzioni $f(x)$ e $c \cdot f(x)$ $(con\ c \in R^+)$ assumono il min e il max assoluto negli stessi punti.
3. La funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ $(con\ f(x) > 0\ \ \forall x \in D)$ assume il min e il max assoluto negli stessi punti in cui la funzione $f(x)$ assume rispettivamente il max e il min assoluto.
4. Le funzioni $f(x)$ e $[f(x)]^{\alpha}$ $(con\ \alpha \in R^+\ e\ f(x) \geq 0\ \ \forall x \in D)$ assumono il min e il max negli stessi punti

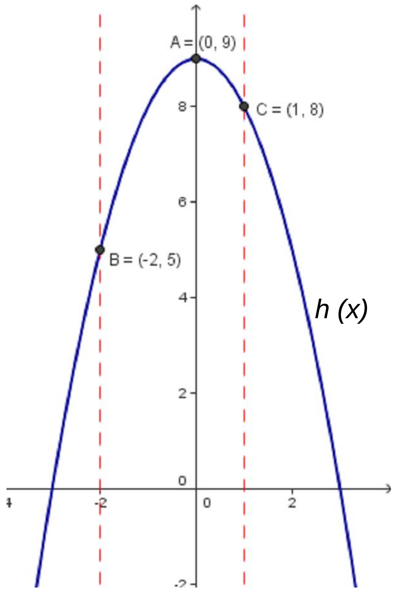
Esempio 1

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione: $f(x) = -5 + \sqrt{9 - x^2}$ nell'intervallo $[-2, 1]$.

<u>*Soluzione*</u>

Essendo la funzione definita e continua $\forall x \in [-3, 3]$, essa lo è anche nell'intervallo $[-2, 1]$.

Per il teorema di Weierstrass è dotata in $[-2, 1]$ di minimo e massimo assoluto.



La ricerca dei punti di minimo e massimo assoluto può essere semplificata applicando le osservazioni 1 e 4.

Applicando l'osservazione 1, la funzione da studiare diventa: $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Applicando l'osservazione 4, la funzione da studiare si riduce a: $h(x) = 9 - x^2$

La sua derivata è: $h^{I}(x) = -2x$. Essa si annulla in $x = 0$.

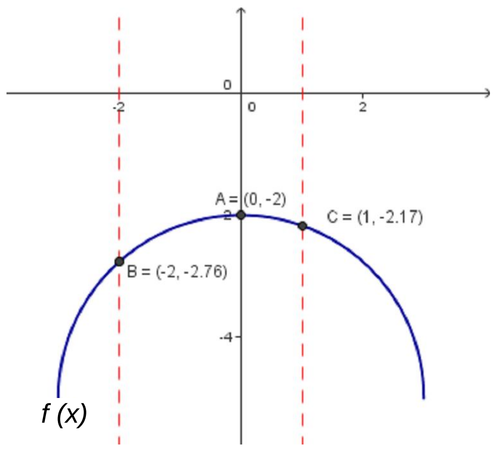
Essendo:

$h(-2) = 9 - (-2)^2 = 5$ $h(1) = 9 - 1^2 = 8$ $h(0) = 9 - \cdot 0^2 = 9$	$\Rightarrow$	Il minimo assoluto di $h(x)$ è $m = 5$ assunto nel punto $x = -2$ Il Massimo assoluto di $h(x)$ è $M = 9$ assunto nel punto $x = 0$

Pertanto:

Il minimo assoluto di $f(x) = -5 + \sqrt{9 - x^2}$ è $m = -5 + \sqrt{5} \cong -2{,}76$ assunto nel punto $x = -2$

Il Massimo assoluto di $f(x) = -5 + \sqrt{9 - x^2}$ è $M = -2$ assunto nel punto $x = 0$



Esempio 2

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione: $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ nell'intervallo $[-3, -1]$.

<u>*Soluzione*</u>

Essendo $e^x - x > 0 \quad \forall x \in [-3, -1]$, si può applicare l'osservazione 4, e studiare la funzione $h(x) = e^x - x$.

La sua derivata è: $h^I(x) = e^x - 1$. Essa si annulla in: $e^x - 1 = 0$; $e^x = 1$; $x = 0$ *(valore non accettabile)*

Essendo:

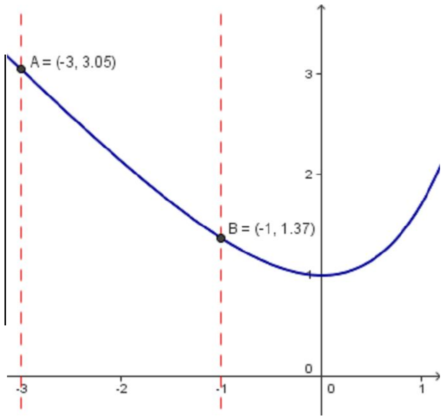
$h(-3) = e^{-3} + 3 \cong 3{,}05$

$h(-1) = e^{-1} + 1 \cong 1{,}37$

$\Rightarrow$

Il minimo assoluto di $h(x)$ è $m = 1 + \dfrac{1}{e}$ assunto nel punto $x = -1$

Il Massimo assoluto di $h(x)$ è $M = 3 + \dfrac{1}{e^3}$ assunto nel punto $x = -3$



Pertanto:

Il massimo assoluto di $f(x)$ è $M = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e}}$ assunto nel punto $x = -1$

Il minimo assoluto di $f(x)$ è $m = \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{e^3}}$ assunto nel punto $x = -3$