Infiniti

Definizioni

Una funzione $f(x)$ *si dice infinita per* $x \to c$ *quando il limite* $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ $(oppure\ -\infty)$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinita per* $x \to 0$ *quando il limite* $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $(oppure\ -\infty)$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinita per* $x \to +\infty$ *quando il limite* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $(oppure\ -\infty)$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinita per* $x \to -\infty$ *quando il limite* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $(oppure\ -\infty)$.

Confronto di infiniti

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni infinite per* $x \to c$.

Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = 0$	$f(x)$ *è infinita di ordine inferiore a* $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = +\infty$	$f(x)$ *è infinita di ordine superiore a* $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = p \neq 0$	$f(x)$ *è infinita dello stesso ordine di* $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert}$ non esiste	*Le due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *non sono confrontabili*

Definizione

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni infinite per* $x \to c$.

Si dice che la funzione $f(x)$ *è infinita di ordine* α *rispetto alla funzione* $g(x)$, *(presa come infinito campione o infinito principale) se il limite* $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert^{\alpha}} = p \neq 0$ *(con* $\alpha \in R_0^+$ *).*

Analogamente se $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Infiniti campione

Anche se per confrontare gli ordini di infinito di più funzioni si può scegliere una qualsiasi funzione come infinito campione, si preferisce tuttavia fissare la funzione $g(x)$, *infinito campione, in modo universale e procedere poi al suo confronto con quelle date.*

Per $x \to c$	*si prende come infinito campione la funzione* $\frac{1}{\lvert x - c\rvert}$
Per $x \to 0$	*si prende come infinito campione la funzione* $\frac{1}{\lvert x\rvert}$
Per $x \to \infty$	*si prende come infinito campione la funzione* $\lvert x\rvert$

Esempio 252-309

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = 3x^2 + 1$ per $x \to \infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{|3x^2+1|}{|x|^\alpha} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^2 \cdot \left|3+\frac{1}{x^2}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} |x|^{2-\alpha} \cdot \left|3+\frac{1}{x^2}\right| = \begin{cases} 3 & \text{se } 2-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=2 \\ \infty & \text{se } 2-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<2 \\ 0 & \text{se } 2-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha = 2$ *per* $x \to \infty$.

Esempio 252-310

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = 5x^4 - 7x + 1$ per $x \to \infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{|5x^4-7x+1|}{|x|^\alpha} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^4 \cdot \left|5-\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} |x|^{4-\alpha} \cdot \left|5-\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right| = \begin{cases} 5 & \text{se } 4-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=4 \\ \infty & \text{se } 4-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<4 \\ 0 & \text{se } 4-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>4 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha = 4$ *per* $x \to \infty$.

Esempio 252-311

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$ per $x \to \infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x^2+\sqrt[3]{x}|}{|x|^\alpha} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|x^2| \cdot \left|1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to\infty} |x|^{2-\alpha} \cdot \left|1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } 2-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=2 \\ \infty & \text{se } 2-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<2 \\ 0 & \text{se } 2-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha = 2$ *per* $x \to \infty$.

Esempio 252-312

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^2+2x+4}$ per $x\to\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x^3+7}{x^2+2x+4}\right|}{|x|^\alpha}=$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x^3\cdot\left(1+\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}\right|}{|x|^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x\cdot\left(1+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}\right|}{|x|^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\left|1+\dfrac{7}{x^3}\right|}{|x|^\alpha\cdot\left|1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right|}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|^{1-\alpha}\frac{\left|1+\dfrac{7}{x^3}\right|}{\left|1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right|}=\begin{cases}1 & \text{se } 1-\alpha=0 \quad \text{cioè se } \alpha=1\\ \infty & \text{se } 1-\alpha>0 \quad \text{cioè se } \alpha<1\\ 0 & \text{se } 1-\alpha<0 \quad \text{cioè se } \alpha>1\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha=1$ per $x\to\infty$.

Esempio 252-313

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ per $x\to\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[3]{x^2-1}\right|}{|x|^\alpha}=$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[3]{x^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}\right|}{|x|^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{\frac{2}{3}}\cdot\left|\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^2}}\right|}{|x|^\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|^{\frac{2}{3}-\alpha}\cdot\left|\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}\right|=\begin{cases}1 & \text{se } \dfrac{2}{3}-\alpha=0 \quad \text{cioè se } \alpha=\dfrac{2}{3}\\ \infty & \text{se } \dfrac{2}{3}-\alpha>0 \quad \text{cioè se } \alpha<\dfrac{2}{3}\\ 0 & \text{se } \dfrac{2}{3}-\alpha<0 \quad \text{cioè se } \alpha>\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha=\dfrac{2}{3}$ per $x\to\infty$.

Esempio 252-314

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^4+2}{x^2+1}}$ per $x\to\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[4]{\dfrac{x^4+2}{x^2+1}}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$

Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[4]{\dfrac{x^4\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}\right|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[4]{\dfrac{x^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^4}\right)}{1+\dfrac{1}{x^2}}}\right|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{\frac{2}{4}}\cdot\left|\sqrt[4]{\dfrac{1+\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^2}}}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|^{\frac{1}{2}-\alpha}\cdot\left|\sqrt[4]{\dfrac{1+\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^2}}}\right|=\begin{cases}1 & \text{se } \dfrac{1}{2}-\alpha=0 \quad \text{cioè se } \alpha=\dfrac{1}{2}\\ \infty & \text{se } \dfrac{1}{2}-\alpha>0 \quad \text{cioè se } \alpha<\dfrac{1}{2}\\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{2}-\alpha<0 \quad \text{cioè se } \alpha>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha=\dfrac{1}{2}$ per $x\to\infty$.

Esempio 252-315

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x-3}$ per $x\to\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x-3}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$

Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[3]{x^3\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}+\sqrt[5]{x^5\cdot\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^5}\right)}\right|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}+x\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^5}}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\left|\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^5}}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|^{1-\alpha}\cdot\left|\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{3}{x^5}}\right|=\begin{cases}1 & \text{se } 1-\alpha=0 \quad \text{cioè se } \alpha=1\\ \infty & \text{se } 1-\alpha>0 \quad \text{cioè se } \alpha<1\\ 0 & \text{se } 1-\alpha<0 \quad \text{cioè se } \alpha>1\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinita di ordine $\alpha=1$ per $x\to\infty$.

Esempio 252-316

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}}{x}$ per $x\to\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}}{x}\right|}{|x|^{\alpha}}=$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:*

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\sqrt[3]{x^4\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}\right|}{|x|^{1+\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}\cdot\left|\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^4}}\right|}{|x|^{1+\alpha}}=\lim_{x\to\infty}|x|^{\frac{4}{3}-1-\alpha}\cdot\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}|x|^{\frac{1}{3}-\alpha}\cdot\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}}\right|=\begin{cases}1 & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha=0 \quad \text{cioè se } \alpha=\frac{1}{3}\\ \infty & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha>0 \quad \text{cioè se } \alpha<\frac{1}{3}\\ 0 & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha<0 \quad \text{cioè se } \alpha>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha=\dfrac{1}{3}$ *per* $x\to\infty$.

Esempio 251-272b

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2}$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|\frac{1}{x^4+x^2}\right|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{|x^4+x^2|} = \textit{raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{|x|^2 \cdot |x^2+1|} = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha-2} \frac{1}{|x^2+1|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha-2=0 \text{ cioè se } \alpha=2 \\ 0 & \text{se } \alpha-2>0 \text{ cioè se } \alpha<2 \\ \infty & \text{se } \alpha-2<0 \text{ cioè se } \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha = 2$ *per* $x \to 0$.

Esempio 251-273b

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}\right|}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{|x^2+\sqrt[3]{x}|} = \textit{raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{|x|^{\frac{1}{3}} \cdot |\sqrt[3]{x^5}+1|} = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{|\sqrt[3]{x^5}+1|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha-\frac{1}{3}=0 \text{ cioè se } \alpha=\frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } \alpha-\frac{1}{3}>0 \text{ cioè se } \alpha<\frac{1}{3} \\ \infty & \text{se } \alpha-\frac{1}{3}<0 \text{ cioè se } \alpha>\frac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha = \dfrac{1}{3}$ *per* $x \to 0$.

Esempio 251-277b

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\dfrac{x+\cos x}{x+sen\,x}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left|\dfrac{x+\cos x}{x+sen\,x}\right|}{\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\cdot|x+\cos x|}{|x+sen\,x|}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\cdot|x+\cos x|}{|x|\cdot\left|1+\dfrac{sen\,x}{x}\right|}=$$

$$=\lim_{x\to 0}|x|^{\alpha-1}\cdot\frac{|x+\cos x|}{\left|1+\dfrac{sen\,x}{x}\right|}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & se\ \ \alpha-1=0\ \ \text{cioè}\ \ se\ \ \alpha=1\\ 0 & se\ \ \alpha-1>0\ \ \text{cioè}\ \ se\ \ \alpha<1\\ \infty & se\ \ \alpha-1<0\ \ \text{cioè}\ \ se\ \ \alpha>1\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha=1$ *per* $x\to 0$.

Esempio 1

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ per $x\to 1$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)|}{\dfrac{1}{|x-1|^{\alpha}}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left|\dfrac{x}{x^2-2x+1}\right|}{\dfrac{1}{|x-1|^{\alpha}}} = \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|^{\alpha}\cdot|x|}{|x^2-2x+1|} = \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|^{\alpha}\cdot|x|}{|x-1|^{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}|x-1|^{\alpha-2}\cdot|x| = \begin{cases} 1 & se\ \ \alpha-2=0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha=2 \\ 0 & se\ \ \alpha-2>0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha<2 \\ \infty & se\ \ \alpha-2<0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha=2$ *per* $x\to 1$.

Esempio 2

Determinare l'ordine di infinito della funzione $f(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt[5]{x^2-5x+6}}$ per $x\to 2$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 2}\frac{|f(x)|}{\dfrac{1}{|x-2|^{\alpha}}} = \lim_{x\to 2}\frac{\left|\dfrac{3x-2}{\sqrt[5]{x^2-5x+6}}\right|}{\dfrac{1}{|x-2|^{\alpha}}} = \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|^{\alpha}\cdot|3x-2|}{\left|\sqrt[5]{x^2-5x+6}\right|} = \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|^{\alpha}\cdot|3x-2|}{\left|\sqrt[5]{(x-2)\cdot(x-3)}\right|} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|^{\alpha}\cdot|3x-2|}{|x-2|^{\frac{1}{5}}\cdot\left|\sqrt[5]{x-3}\right|} = \lim_{x\to 2}|x-2|^{\alpha-\frac{1}{5}}\cdot\frac{|3x-2|}{\left|\sqrt[5]{x-3}\right|} = \begin{cases} -4 & se\ \ \alpha-\dfrac{1}{5}=0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha=\dfrac{1}{5} \\ 0 & se\ \ \alpha-\dfrac{1}{5}>0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha<\dfrac{1}{5} \\ \infty & se\ \ \alpha-\dfrac{1}{5}<0\ \ cioè\ \ se\ \ \alpha>\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinita di ordine* $\alpha=\dfrac{1}{5}$ *per* $x\to 2$.