Infinitesimi

Definizioni

Una funzione $f(x)$ *si dice infinitesima per* $x \to c$ *quando il limite* $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinitesima per* $x \to 0$ *quando il limite* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinitesima per* $x \to +\infty$ *quando il limite* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Una funzione $f(x)$ *si dice infinitesima per* $x \to -\infty$ *quando il limite* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Confronto di infinitesimi

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni infinitesime per* $x \to c$.

Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert} = 0$	$f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert} = \infty$	$f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert} = p \neq 0$	$f(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $g(x)$
Se $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert}$ non esiste	Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili

Definizione

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni infinitesime per* $x \to c$.

Si dice che la funzione $f(x)$ *è un infinitesimo di ordine* α *rispetto alla funzione* $g(x)$*, (presa come infinitesimo campione o infinitesimo principale) se il limite* $\lim_{x \to c} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert^{\alpha}} = p \neq 0$ *(con* $\alpha \in R_0^+$ *).*

Analogamente se $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Infinitesimi campione

Anche se per confrontare gli ordini di infinitesimo di più funzioni si può scegliere una qualsiasi funzione come infinitesimo campione, si preferisce tuttavia fissare la funzione $g(x)$*, infinitesimo campione, in modo universale e procedere poi al suo confronto con quelle date.*

Per $x \to c$	si prende come infinitesimo campione la funzione $\lvert x - c \rvert$
Per $x \to 0$	si prende come infinitesimo campione la funzione $\lvert x \rvert$
Per $x \to \infty$	si prende come infinitesimo campione la funzione $\frac{1}{\lvert x \rvert}$

Esempio 228-25

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\sqrt{9-x^4}-3$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt{9-x^4}-3\right|}{|x|^{\alpha}} =$$ *Moltiplicando per il coniugato del numeratore si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt{9-x^4}-3\right|}{|x|^{\alpha}}\cdot\frac{\left|\sqrt{9-x^4}+3\right|}{\left|\sqrt{9-x^4}+3\right|} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|9-x^4-9\right|}{|x|^{\alpha}\cdot\left|\sqrt{9-x^4}+3\right|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left|-x^4\right|}{|x|^{\alpha}\cdot\left|\sqrt{9-x^4}+3\right|} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^4}{|x|^{\alpha}\cdot\left(\sqrt{9-x^4}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{4-\alpha}}{\sqrt{9-x^4}+3} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{9-x^4}+3}=\dfrac{1}{6} & \text{se } 4-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=4 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{n>0}}{\sqrt{9-x^4}+3}=0 & \text{se } 4-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<4 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|^{n>0}\cdot\left(\sqrt{9-x^4}+3\right)}=\infty & \text{se } 4-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>4 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=4$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-272

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=x^4+x^2$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|x^4+x^2\right|}{|x|^{\alpha}} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2\right|\cdot\left|x^2+1\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0}|x|^{2-\alpha}\cdot\left|x^2+1\right| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left|x^2+1\right|=1 & \text{se } 2-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=2 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^{n>0}\cdot\left|x^2+1\right|=0 & \text{se } 2-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x^2+1\right|}{x^{n>0}}=\infty & \text{se } 2-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=2$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-273

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2+\sqrt[3]{x}\right|}{|x|^\alpha} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:*

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2+x^{\frac{1}{3}}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\frac{1}{3}}\cdot\left|x^{\frac{5}{3}}+1\right|}{|x|^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{3}-\alpha}\cdot\left|x^{\frac{5}{3}}+1\right| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left|x^{\frac{5}{3}}+1\right|=1 & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha=0 \ \text{ cioè se } \alpha=\frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 0}|x|^{n>0}\cdot\left|x^{\frac{5}{3}}+1\right|=0 & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha>0 \ \text{ cioè se } \alpha<\frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|x^{\frac{5}{3}}+1\right|}{|x|^{n>0}}=\infty & \text{se } \frac{1}{3}-\alpha<0 \ \text{ cioè se } \alpha>\frac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=\frac{1}{3}$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-274

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt{x}\right|}{|x|^\alpha\cdot|x+1|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1}{2}-\alpha}\cdot\frac{1}{|x+1|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x+1|}=1 & \text{se } \frac{1}{2}-\alpha=0 \ \text{ cioè se } \alpha=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0}|x|^{n>0}\cdot\frac{1}{|x+1|}=0 & \text{se } \frac{1}{2}-\alpha>0 \ \text{ cioè se } \alpha<\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|^{n>0}\cdot|x+1|}=\infty & \text{se } \frac{1}{2}-\alpha<0 \ \text{ cioè se } \alpha>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=\frac{1}{2}$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-275

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = tg^3 x$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|tg^3 x|}{|x|^\alpha} = \quad \text{Sfruttando il limite notevole: } \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1 \text{ si ha:}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left|\frac{sen^3 x}{cos^3 x}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|sen^3 x|}{|x|^\alpha \cdot |cos^3 x|} = \text{ moltiplicando e dividendo per } |x|^3 \text{ si ha:}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3 \cdot \left|\frac{sen^3 x}{|x|^3}\right|}{|x|^\alpha \cdot |cos^3 x|} = \lim_{x\to 0} |x|^{3-\alpha} \cdot \frac{\left|\frac{sen\, x}{x}\right|^3}{|cos^3 x|} = \begin{cases} 1 & se\ 3 - \alpha = 0 \quad cioè\ se\ \alpha = 3 \\ 0 & se\ 3 - \alpha > 0 \quad cioè\ se\ \alpha < 3 \\ \infty & se\ 3 - \alpha < 0 \quad cioè\ se\ \alpha > 3 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha = 3$ per $x \to 0$.

Esempio 251-276

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = sen\, 3x$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|sen\, 3x|}{|x|^\alpha} = \quad \text{dividendo ambo i membri per } |3x| \text{ si ha:}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{|sen\, 3x|}{|3x|}}{\frac{|x|^\alpha}{|3x|}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|\frac{sen\, 3x}{3x}\right|}{\frac{|x|^{\alpha-1}}{3}} = \lim_{x\to 0} |x|^{1-\alpha} \cdot 3 \cdot \left|\frac{sen\, 3x}{3x}\right| = \begin{cases} 3 & se\ 1 - \alpha = 0 \quad cioè\ se\ \alpha = 1 \\ 0 & se\ 1 - \alpha > 0 \quad cioè\ se\ \alpha < 1 \\ \infty & se\ 1 - \alpha < 0 \quad cioè\ se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha = 1$ per $x \to 0$.

Esempio 251-277

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \dfrac{x + sen\, x}{x + cos\, x}$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|\frac{x + sen\, x}{x + cos\, x}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|x + sen\, x|}{|x|^\alpha \cdot |x + cos\, x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| \cdot \left|1 + \frac{sen\, x}{x}\right|}{|x|^\alpha \cdot |x + cos\, x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0} |x|^{1-\alpha} \frac{\left|1 + \frac{sen\, x}{x}\right|}{|x + cos\, x|} = \begin{cases} 2 & se\ 1 - \alpha = 0 \quad cioè\ se\ \alpha = 1 \\ 0 & se\ 1 - \alpha > 0 \quad cioè\ se\ \alpha < 1 \\ \infty & se\ 1 - \alpha < 0 \quad cioè\ se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha = 1$ per $x \to 0$.

Esempio 251-278

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-3sen^3 x}{2x+sen\,5x}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\dfrac{x^2-3sen^3 x}{2x+sen\,5x}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2-3sen^3 x|}{|x|^\alpha\cdot|2x+sen\,5x|} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^2\cdot\left|1-\dfrac{3sen^3 x}{x^2}\right|}{|x|^\alpha\cdot|x|\cdot\left|2+\dfrac{sen\,5x}{x}\right|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{|x|^2\cdot\left|1-3\dfrac{sen^2 x}{x^2}\cdot sen\,x\right|}{|x|^\alpha\cdot|x|\cdot\left|2+\dfrac{sen\,5x}{5x}\cdot 5\right|} = \lim_{x\to 0}|x|^{1-\alpha}\cdot\frac{\left|1-3\dfrac{sen^2 x}{x^2}\cdot sen\,x\right|}{\left|2+\dfrac{sen\,5x}{5x}\cdot 5\right|} = \begin{cases}\dfrac{1}{7} & se\ 1-\alpha=0\ \ cioè\ se\ \alpha=1\\ 0 & se\ 1-\alpha>0\ \ cioè\ se\ \alpha<1\\ \infty & se\ 1-\alpha<0\ \ cioè\ se\ \alpha>1\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=1$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-279

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\dfrac{x^4}{x^2+1}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^4}{|x|^\alpha\cdot|x^2+1|} = \lim_{x\to 0}|x|^{4-\alpha}\cdot\frac{1}{|x^2+1|} = \begin{cases}1 & se\ 4-\alpha=0\ \ cioè\ se\ \alpha=4\\ 0 & se\ 4-\alpha>0\ \ cioè\ se\ \alpha<4\\ \infty & se\ 4-\alpha<0\ \ cioè\ se\ \alpha>4\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=4$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-281

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\log(1+2x)$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|\log(1+2x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|2x|\cdot|\log(1+2x)|}{|x|^\alpha\cdot|2x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}2|x|^{1-\alpha}\cdot\left|\frac{\log(1+2x)}{2x}\right| = \begin{cases}2 & se\ 1-\alpha=0\ \ cioè\ se\ \alpha=1\\ 0 & se\ 1-\alpha>0\ \ cioè\ se\ \alpha<1\\ \infty & se\ 1-\alpha<0\ \ cioè\ se\ \alpha>1\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=1$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-285

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^2+\cos x}}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^2+\cos x}}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\sqrt[3]{\dfrac{x^2\cdot(x+1)}{x^2+\cos x}}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\frac{2}{3}}\cdot\left|\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2+\cos x}}\right|}{|x|^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0}|x|^{\frac{2}{3}-\alpha}\cdot\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+\cos x}}\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{2}{3}-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=\frac{2}{3} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{3}-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<\frac{2}{3} \\ \infty & \text{se } \frac{2}{3}-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=\frac{2}{3}$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-286

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\dfrac{sen^3 x}{x+sen\,x}$ per $x\to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\left|\dfrac{sen^3 x}{x+sen\,x}\right|}{|x|^\alpha} =$$

Sfruttando il limite notevole: $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$ *si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|\dfrac{sen^3 x}{x+sen\,x}\right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{|sen^3 x|}{|x|^\alpha\cdot|x+sen\,x|} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^3\cdot|sen^3 x|}{|x|^3\cdot|x|^\alpha\cdot|x+sen\,x|} = \lim_{x\to 0}\frac{|sen^3 x|}{|x^3|}\cdot\frac{|x^3|}{|x|^\alpha}\cdot\frac{1}{|x|\cdot\left|1+\dfrac{sen\,x}{x}\right|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}|x|^{2-\alpha}\cdot\left|\frac{sen\,x}{x}\right|^3\cdot\frac{1}{\left|1+\dfrac{sen\,x}{x}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 2-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=2 \\ 0 & \text{se } 2-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<2 \\ \infty & \text{se } 2-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=2$ *per* $x\to 0$.

Esempio 251-289

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = 5 \cdot \sqrt[5]{tg\ x} \cdot sen\ x$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|5 \cdot \sqrt[5]{tg\ x} \cdot sen\ x\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|5 \cdot \sqrt[5]{\frac{sen\ x}{cos\ x}} \cdot sen\ x\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|5 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{cos\ x}} \cdot sen^{\frac{1}{5}} x \cdot sen\ x\right|}{|x|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \left|sen^{\frac{6}{5}} x\right|}{|x|^{\alpha} \cdot \sqrt[5]{cos\ x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot |x|^{\frac{6}{5}} \cdot \frac{\left|sen^{\frac{6}{5}} x\right|}{|x|^{\frac{6}{5}}}}{|x|^{\alpha} \cdot \sqrt[5]{cos\ x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot |x|^{\frac{6}{5}-\alpha} \cdot \left|\frac{|sen\ x|}{x}\right|^{\frac{6}{5}}}{\sqrt[5]{cos\ x}} = \begin{cases} 5 & se\ \frac{6}{5} - \alpha = 0 \quad cioè\ se\ \alpha = \frac{6}{5} \\ 0 & se\ \frac{6}{5} - \alpha > 0 \quad cioè\ se\ \alpha < \frac{6}{5} \\ \infty & se\ \frac{6}{5} - \alpha < 0 \quad cioè\ se\ \alpha > \frac{6}{5} \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha = \frac{6}{5}$ *per* $x \to 0$.

Esempio 251-290

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = 1 - cos\,2x$ per $x \to 0$.

Soluzione

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} \frac{|1 - cos\,2x|}{|x|^{\alpha}} =$$ *applicando la formula di duplicazione del coseno si ha:*

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\left|1 - \left(cos^2 x - sen^2 x\right)\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} \frac{\left|1 - cos^2 x + sen^2 x\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} \frac{\left|sen^2 x + sen^2 x\right|}{|x|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2 \cdot \left|sen^2 x\right|}{|x|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} \frac{2 \cdot |x|^2 \cdot \left|sen^2 x\right|}{|x|^{\alpha} \cdot |x|^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3} 2 \cdot |x|^{2-\alpha} \cdot \left|\frac{sen\ x}{x}\right|^2 = \begin{cases} 2 & se\ 2 - \alpha = 0 \quad cioè\ se\ \alpha = 2 \\ 0 & se\ 2 - \alpha > 0 \quad cioè\ se\ \alpha < 2 \\ \infty & se\ 2 - \alpha < 0 \quad cioè\ se\ \alpha > 2 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha = 2$ *per* $x \to 0$.

Esempio 251-291

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ per $x \to 3$.

Soluzione

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{|x-c|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} \frac{|x^3 - 3x^2|}{|x-3|^{\alpha}} =$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:*

$$\lim_{x\to 3} \frac{|x^2|\cdot|x-3|}{|x-3|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3} |x-3|^{1-\alpha}\cdot|x|^2 = \begin{cases} 9 & \text{se } 1-\alpha = 0 \text{ cioè se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 1-\alpha > 0 \text{ cioè se } \alpha < 1 \\ \infty & \text{se } 1-\alpha < 0 \text{ cioè se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha = 1$ *per* $x \to 3$.

Esempio 251-292

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \cos x$ per $x \to \frac{\pi}{2}$.

Soluzione

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{|x-c|^{\alpha}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^{\alpha}} =$$ *Ponendo* $x - \frac{\pi}{2} = t$ *si ha:*

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right|}{|t|^{\alpha}} =$$ *Applicando la formula di addizione del coseno si ha:*

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left|\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos t - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen} t\right|}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{|0\cdot\cos t - 1\cdot\operatorname{sen} t|}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{|-\operatorname{sen} t|}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|^{\alpha}}$$

moltiplicando e dividendo per $|t|$ *si ha:*

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|\cdot\frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|}}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t\to 0} |t|^{1-\alpha}\cdot\left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } 1-\alpha = 0 \text{ cioè se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 1-\alpha > 0 \text{ cioè se } \alpha < 1 \\ \infty & \text{se } 1-\alpha < 0 \text{ cioè se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha = 1$ *per* $x \to \frac{\pi}{2}$.

Esempio 251-293

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\sqrt[5]{x^2-9}+\sqrt[3]{x^3-27}$ per $x\to 3$.

Soluzione

$$\lim_{x\to c}\frac{|f(x)|}{|x-c|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3}\frac{\left|\sqrt[5]{x^2-9}+\sqrt[3]{x^3-27}\right|}{|x-3|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3}\frac{\left|\sqrt[5]{(x+3)\cdot(x-3)}+\sqrt[3]{(x-3)\cdot\left(x^2+3x+9\right)}\right|}{|x-3|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left|(x-3)^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{x+3}+(x-3)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2+3x+9}\right|}{|x-3|^{\alpha}}$$ *Raccogliendo a fattor comune la x di grado minimo si ha:*

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left|(x-3)\right|^{\frac{1}{5}}\cdot\left|\sqrt[5]{x+3}+(x-3)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[3]{x^2+3x+9}\right|}{|x-3|^{\alpha}} = \lim_{x\to 3}\frac{\left|(x-3)\right|^{\frac{1}{5}}\cdot\left|\sqrt[5]{x+3}+(x-3)^{\frac{2}{15}}\cdot\sqrt[3]{x^2+3x+9}\right|}{|x-3|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left|(x-3)\right|^{\frac{1}{5}-\alpha}\cdot\left|\sqrt[5]{x+3}+\sqrt[15]{(x-3)^2}\cdot\sqrt[3]{x^2+3x+9}\right| = \begin{cases}\sqrt[5]{6} & \text{se } \frac{1}{5}-\alpha=0 \text{ cioè se } \alpha=\frac{1}{5}\\ 0 & \text{se } \frac{1}{5}-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<\frac{1}{5}\\ \infty & \text{se } \frac{1}{5}-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>\frac{1}{5}\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=\frac{1}{5}$ *per* $x\to 3$.

Esempio 252-302

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-1}$ per $x\to+\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|\frac{1}{x^2+3x-1}\right|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|^{\alpha}}{|x^2+3x-1|}=$$

Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|^{\alpha}}{|x|^2\cdot\left|1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right|}=\lim_{x\to+\infty}|x|^{\alpha-2}\cdot\frac{1}{\left|1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right|}=\begin{cases}1 & \text{se } \alpha-2=0 \text{ cioè se } \alpha=2\\ \infty & \text{se } \alpha-2>0 \text{ cioè se } \alpha<2\\ 0 & \text{se } \alpha-2<0 \text{ cioè se } \alpha>2\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=2$ *per* $x\to+\infty$.

Esempio 252-306

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^6-2x}$ per $x\to+\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^6-2x}\right|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|^{\alpha}\cdot\left|x\cdot\sqrt[3]{x}\right|}{|x^6-2x|}=$$

Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|^{\alpha+1+\frac{1}{3}}}{|x|^6\cdot\left|1-\frac{2}{x^5}\right|}=\lim_{x\to+\infty}|x|^{\alpha+1+\frac{1}{3}-6}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{2}{x^5}\right|}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|^{\alpha-\frac{14}{3}}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{2}{x^5}\right|}=\begin{cases}1 & \text{se } \alpha-\frac{14}{3}=0 \text{ cioè se } \alpha=\frac{14}{3}\\ \infty & \text{se } \alpha-\frac{14}{3}>0 \text{ cioè se } \alpha>\frac{14}{3}\\ 0 & \text{se } \alpha-\frac{14}{3}<0 \text{ cioè se } \alpha<\frac{14}{3}\end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=\dfrac{14}{3}$ *per* $x\to+\infty$.

Esempio 252-307

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ per $x \to +\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} |x|^{\alpha}\cdot\left|\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right| = \textit{moltiplicando e dividendo per } |x| \textit{ si ha:}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{\alpha}}{|x|}\cdot|x|\cdot\left|\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right| = \lim_{x\to+\infty} |x|^{\alpha-1}\left|\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{|x|}\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha-1=0 \text{ cioè se } \alpha=1 \\ \infty & \text{se } \alpha-1>0 \text{ cioè se } \alpha<1 \\ 0 & \text{se } \alpha-1<0 \text{ cioè se } \alpha>1 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=1$ *per* $x \to +\infty$.

Esempio 252-308

Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \frac{1}{5x^4+3x^2}$ per $x \to +\infty$.

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{5x^4+3x^2}\right|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{\alpha}}{\left|5x^4+3x^2\right|} =$$

Raccogliendo a fattor comune la x di grado massimo si ha:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{\alpha}}{|x|^4\cdot\left|5+\frac{3}{x^2}\right|} = \lim_{x\to+\infty} |x|^{\alpha-4}\cdot\frac{1}{\left|5+\frac{3}{x^2}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } \alpha-2=4 \text{ cioè se } \alpha=4 \\ \infty & \text{se } \alpha-4>0 \text{ cioè se } \alpha<4 \\ 0 & \text{se } \alpha-4<0 \text{ cioè se } \alpha>4 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ *è infinitesima di ordine* $\alpha=4$ *per* $x \to +\infty$.