

## Esercizio x1 – Calcolo di limiti

Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\ln^2(1+ax)}$

1. per  $a = 1$
2. per  $a > 0$

Soluzione 1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\ln^2(1+x)} = \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right)$ . Il limite si può riscrivere come:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \right]^2$ .

Applicando De L'Hospital si ha:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x}$

Riapplicando De L'Hospital si ha:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$ .

In definitiva:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \right]^2 = 1^2 = 1$ .

Soluzione 2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\ln^2(1+ax)} = \left( \frac{\infty}{\infty} = ? \right)$ . Il limite si può riscrivere come:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{\ln(1+ax)} \right]^2$ .

Applicando De L'Hospital si ha:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+ax)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{1+ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+ax}{ax}$

Riapplicando De L'Hospital si ha:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ .

In definitiva:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{\ln(1+ax)} \right]^2 = 1^2 = 1$ .