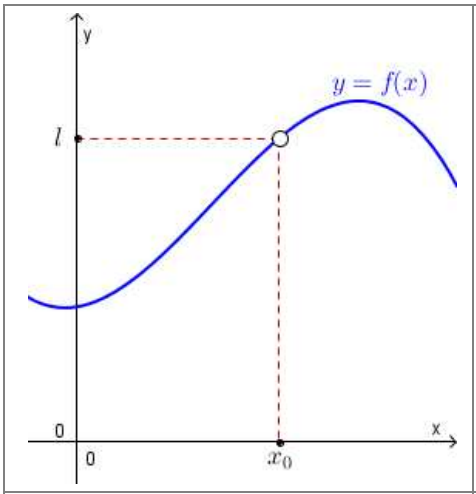
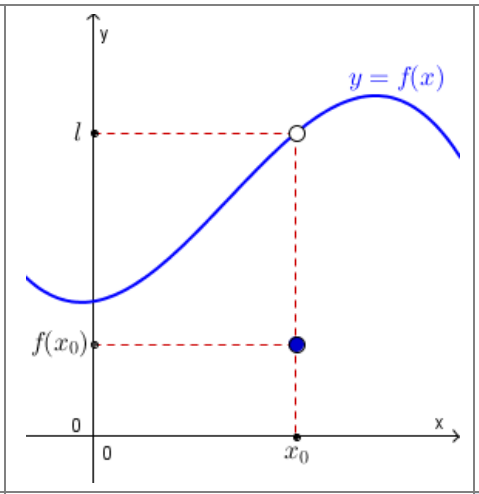
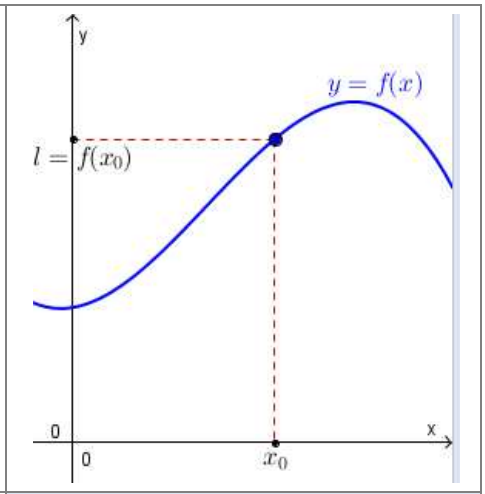
LIMITI

Calcolo di limiti

FUNZIONE CONTINUA

Definizione

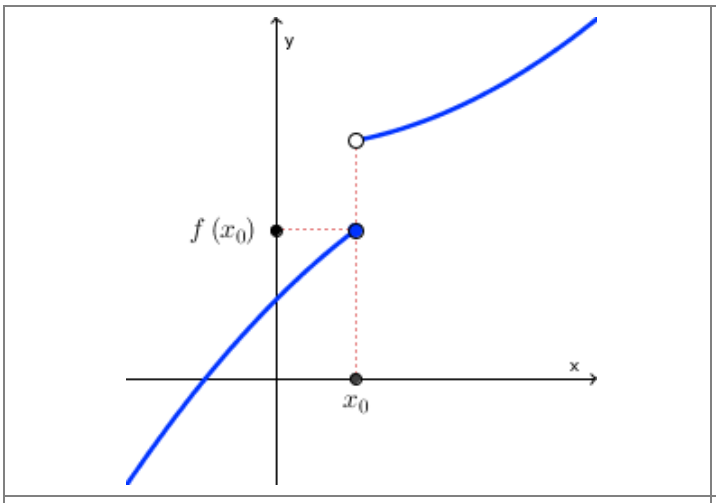
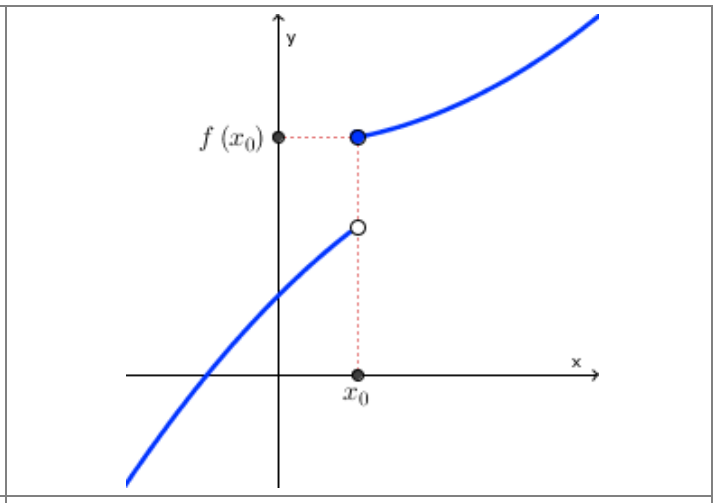
Una funzione $f(x)$ si dice **continua** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

		
La funzione $f(x)$ non è definita in x_0 ma esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	La funzione $f(x)$ è definita in x_0 ma il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$	La funzione $f(x)$ è definita in x_0 e il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
La funzione $f(x)$ **non è continua** in x_0	La funzione $f(x)$ **non è continua** in x_0	La funzione $f(x)$ **è continua** in x_0

Definizione

Una funzione $f(x)$ si dice **continua a destra** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Una funzione $f(x)$ si dice **continua a sinistra** in un punto x_0 quando il limite $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

	
La funzione $f(x)$ **è continua a sinistra** in x_0	La funzione $f(x)$ **è continua a destra** in x_0

Definizione

Una funzione $f(x)$ **è continua in un intervallo** I quando è continua in ogni punto dell'intervallo I .

Una funzione continua in un intervallo I è quella il cui grafico è una curva senza interruzioni (retta, parabola, …)

FUNZIONI CONTINUE ELEMENTARI

Le principali funzioni continue sono:

La funzione **razionale intera** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ . \ . \ . \ + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **razionale fratta** $y = \frac{N(x)}{D(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ D(x) \neq 0\}$.

La funzione **irrazionale** di indice dispari $y = \sqrt[Dispari]{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **irrazionale** di indice pari $y = \sqrt[Pari]{f(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ f(x) \geq 0\}$.

La funzione **logaritmica** $y = log_a x$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ f(x) > 0\}$.

La funzione **esponenziale** $y = a^{f(x)}$ è continua $\forall x \in R$.

La funzione **esponenziale** $y = f(x)^{g(x)}$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ f(x) > 0\}$.

Le funzioni **goniometriche** $y = sin\, x$ e $y = cos\, x$ sono continue $\forall x \in R$.

La funzione **goniometrica** $y = tan\, f(x)$ è continua nell'insieme $\left\{x \in R \ / \ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

La funzione **goniometrica** $y = cotan\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ f(x) \neq k\pi\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arcsin\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arccos\, f(x)$ è continua nell'insieme $\{x \in R \ / \ -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

La funzione **goniometrica** $y = arctan\, f(x)$ è continua $\forall x \in R$.

LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Il calcolo del limite di una funzione continua, per $x \to x_0$, risulta particolarmente semplice. Infatti:

Il limite di una funzione continua $f(x)$ per $x \to x_0$ è uguale al valore della funzione nel punto x_0 .	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esempi

$$\lim_{x \to 2} (5x - 3) = f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$$

$$\lim_{x \to 2} (3 + 4x - 5x^2 + x^3) = 3 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 + 2^3 = 3 + 8 - 20 + 8 = -1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - x^3}{3x - 4} = \frac{2 \cdot 2 - 2^3}{3 \cdot 2 - 4} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{2x - 5x^2 + x^3} = \sqrt[3]{2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1)^2 + (-1)^3} = \sqrt[3]{-2 - 5 - 1} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt[4]{x - 3} = \nexists \qquad perchè \ \ in \ -1 \ \ la\, funzione\, non\, è\, definita.$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[4]{3^2 + 2 \cdot 3 + 1} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[2]{2^4} = 2$$

$$\lim_{x \to 3} log_2 (x + 5) = log_2 8 = 3 \qquad \lim_{x \to 3} log_2 (1 - x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to 3} 2^{2x-1} = 2^{2 \cdot 3 - 1} = 2^5 = 32$$

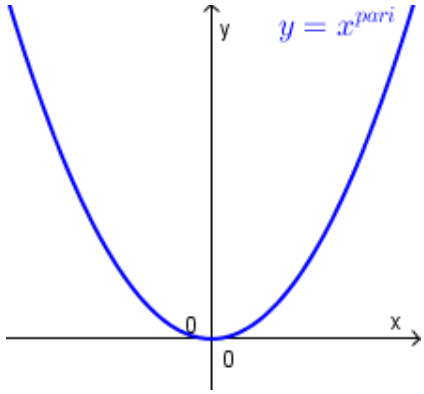
$$\lim_{x \to 3} (5 - x)^{2x-4} = (5 - 3)^{2 \cdot 3 - 4} = 2^2 = 4 \qquad \lim_{x \to 3} (1 - x)^{x+2} = \nexists$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} sin\, x = sin \frac{\pi}{2} = 1 \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} tan\, x = tan \frac{\pi}{4} = 1$$

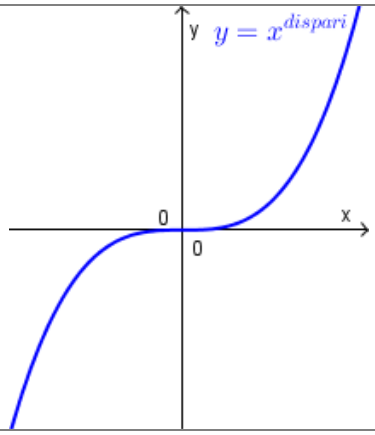
LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI AGLI ESTREMI DELL'INSIEME DI DEFINIZIONE

Il limite di una funzione può essere ricavato anche dall'analisi del suo grafico.

Funzione potenza

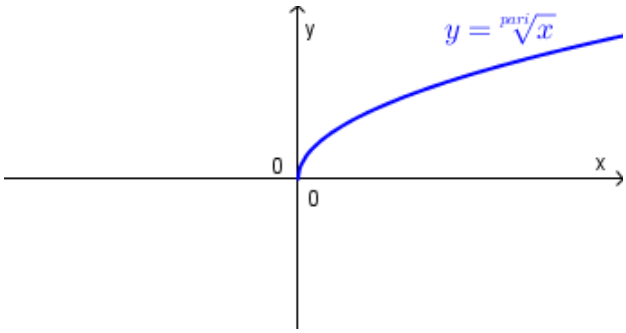


$\lim_{x \to -\infty} x^{pari} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^{pari} = +\infty$

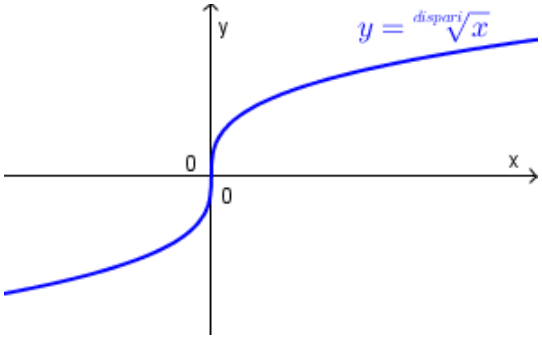


$\lim_{x \to -\infty} x^{dispari} = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^{dispari} = +\infty$

Funzione radice

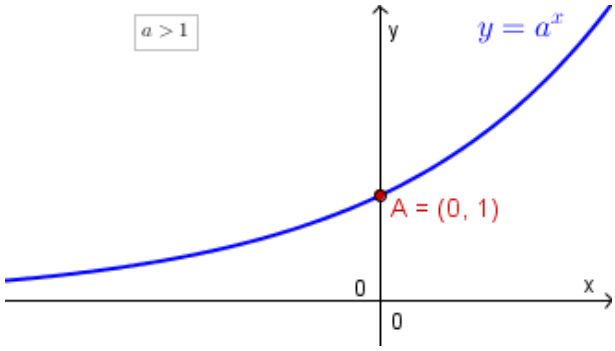


$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[pari]{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[pari]{x} = +\infty$

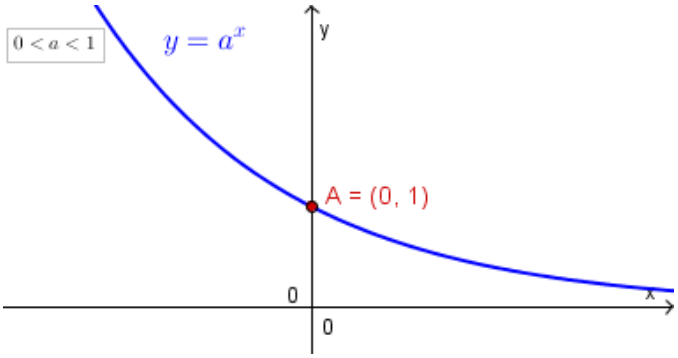


$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[dispari]{x} = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[dispari]{x} = +\infty$

Funzione esponenziale

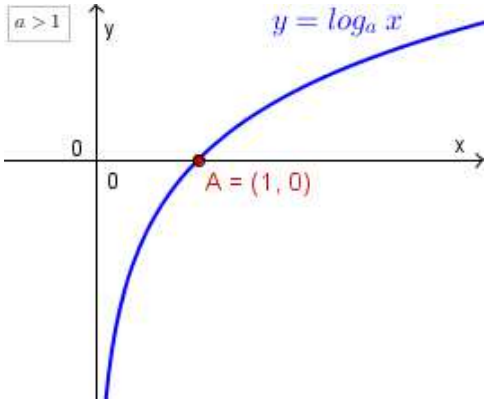


$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

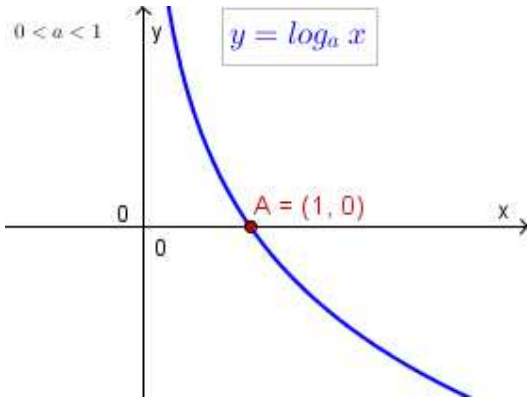


$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$

Funzione logaritmica

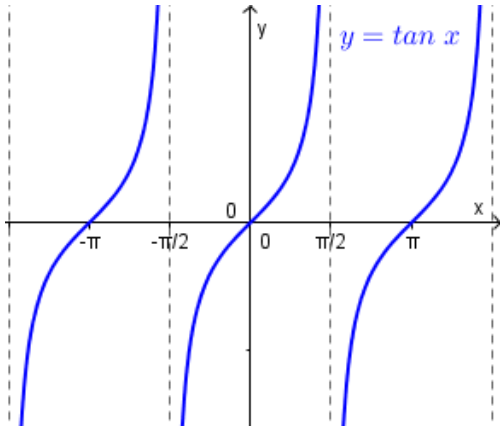


$\lim\limits_{x \to 0^+} log_a\, x = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a\, x = +\infty$

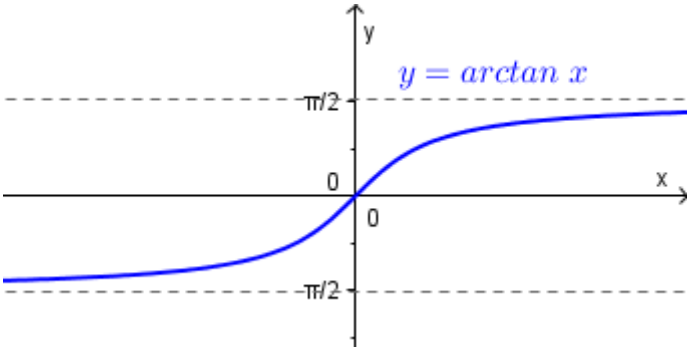


$\lim\limits_{x \to 0^+} log_a\, x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a\, x = -\infty$

Funzione tangente



$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tan\, x = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tan\, x = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} arctan\, x = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} arctan\, x = \frac{\pi}{2}$

Esempi

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[2]{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} log_5\, x = -\infty$

ALGEBRA DEI LIMITI

Per effettuare il calcolo dei limiti sono utili i seguenti teoremi relativi alle operazioni sui limiti.
Questi teoremi sono validi sia nel caso di limiti per x tendenti a valori finiti, sia per x tendenti a valori non finiti.

Teorema 1 - Le funzioni hanno limite finito

Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno $I_{x_0} - \{x_0\}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

$$con \quad l, m \in R \quad e \quad x_0 \in R \cup \{\pm\infty\}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l - m$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$\lim_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot l \qquad \forall k \in R$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n \qquad \forall n \in N - \{0\}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \qquad se \ m \neq 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m} \qquad se \ m \neq 0$$

Teorema 2 - Le funzioni non hanno entrambe limite finito

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$
l	$+\infty$
l	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$

$\Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$
$l + \infty = +\infty$
$l - \infty = -\infty$
$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$+\infty - \infty = ?$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$
l	∞
∞	∞
0	∞

$\Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ Secondo la regola dei segni
$l \cdot \infty = \infty$
$\infty \cdot \infty = \infty$
$0 \cdot \infty = ?$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$
l	∞
l	0
∞	l
0	0
∞	∞

$\Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x)}$ Secondo la regola dei segni
$\frac{l}{\infty} = 0$
$\frac{l}{0} = \infty$
$\frac{\infty}{l} = \infty$
$\frac{0}{0} = ?$
$\frac{\infty}{\infty} = ?$

Esempio 1

Consideriamo i due limiti tendenti allo stesso valore finito 1 :

$$\lim_{x\to 1} (5x-3) = 2 \qquad e \qquad \lim_{x\to 1} (6-2x) = 4$$

Calcoliamo il limite della somma algebrica delle due funzioni:

$$\lim_{x\to 1} [(5x-3)+(6-2x)] = \lim_{x\to 1} [5x-3+6-2x] = \lim_{x\to 1} [3x+3] = 3\cdot 1+3 = 6$$

Osserviamo che tale limite è uguale proprio alla somma dei due limiti $l_1 + l_2 = 2+4 = 6$.

Esempio 2

$Se \quad \lim_{x\to 1} (2x-5) = -3 \ , \qquad allora \qquad \lim_{x\to 1} 4\cdot(2x-5) = 4\cdot(-3) = -12$.

$Infatti: \quad \lim_{x\to 1} 4\cdot(2x-5) = \lim_{x\to 1} (8x-20) = -12$.

Esempio 3

$Se \quad \lim_{x\to 1} (2x-5) = -3 \qquad e \qquad \lim_{x\to 1} (4+x) = 5 \ , \quad allora \qquad \lim_{x\to 1} (2x-5)\cdot(4+x) = -3\cdot 5 = -15$.

$Infatti: \quad \lim_{x\to 1} (2x-5)\cdot(4+x) = \lim_{x\to 1} (2x^2+3x-20) = -15$.

Esempio 4

$Se \quad \lim_{x\to 1} (2x+1) = 3 \qquad allora \qquad \lim_{x\to 1} (2x+1)^2 = (3)^2 = 9$.

$Infatti: \quad \lim_{x\to 1} (2x+1)^2 = \lim_{x\to 1} (4x^2+4x+1) = 9$.

Esempio 5

$Se \quad \lim_{x\to 2} (-3x) = -6 \qquad e \qquad \lim_{x\to 2} \frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$

Allora il limite del prodotto vale: $\lim_{x\to 2} (-3x)\cdot\frac{5}{(x-2)^2} = -\infty$

FORME INDETERMINATE

Nella tabella ci sono delle celle senza risultato: $+\infty - \infty = ?$ $\quad \mathbf{0}\cdot\infty = ?$ $\quad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty} = ?$

Esse rappresentano delle **forme indeterminate** o di indecisione, perché il risultato dell'operazione non è univoco.

A tal proposito consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 1

$Se \quad \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to +\infty} -5x = -\infty$

allora $\lim_{x\to +\infty} [(2x)+(-5x)] = \lim_{x\to +\infty} (-3x) = -\infty$

Esempio 2

$Se \quad \lim_{x\to +\infty} 5x = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to +\infty} -3x = -\infty$

$allora \quad \lim_{x\to +\infty} [(5x)+(-3x)] = \lim_{x\to +\infty} (2x) = +\infty$

Esempio 3

Se $\lim_{x\to +\infty} (2x+3) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to +\infty} (1-2x) = -\infty$

allora $\lim_{x\to +\infty} [(2x+3)+(1-2x)] = \lim_{x\to +\infty} (4) = 4$

In questi tre esempi i risultati ottenuti dal calcolo del limite della somma $+\infty - \infty$ sono uno diverso dall'altro.

Pertanto non è possibile definire una regola che permette di effettuare il calcolo $+\infty - \infty$ in maniera univoca.

Esempio 4

$Se \quad \lim_{x \to 0} (5x^4) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{3}{x^4} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{3}{x^6} = +\infty$

Allora il limite del prodotto: $\lim_{x \to 0} (5x^4) \cdot \frac{3}{x^4} \quad = \quad \lim_{x \to 0} (15) \quad = \quad 15$

Mentre il limite del prodotto: $\lim_{x \to 0} (5x^4) \cdot \frac{3}{x^6} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{15}{x^2} = +\infty$

In quest'ultimo esempio i risultati ottenuti dal calcolo del limite del prodotto $0 \cdot \infty$ sono uno diverso dall'altro. Pertanto non è possibile definire una regola che permette di effettuare il calcolo $0 \cdot \infty$ in maniera univoca.

IL LIMITE DELLA POTENZA

Teorema – Potenza con esponente un numero reale

Se $n \in R - \{0\}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in R$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n$

Esempio 1

$Se \quad \lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3 \quad$ allora $\quad \lim\limits_{x \to 2} (4x - 5)^2 = 3^2 = 9\,.$

Esempio 2

$Se \quad \lim\limits_{x \to 2} (4x + 1) = 9 \quad$ allora $\quad \lim\limits_{x \to 2} \sqrt[2]{4x + 1} = 3$

Teorema – Potenza con esponente una funzione

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$		$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}}$
$+\infty$	0		$+\infty^{\,0} = ?$
	$+\infty$		$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
	$-\infty$		$(+\infty)^{-\infty} = 0$
0	0		$0^{\,0} = ?$
	$+\infty$		$0^{+\infty} = 0$
	$-\infty$		$0^{-\infty} = +\infty$
1	0	$\Rightarrow$	$1^{\,0} = 1$
	∞		$1^{\infty} = ?$
$0 < l < 1$	0		$l^{\,0} = 1$
	$+\infty$		$l^{+\infty} = 0$
	$-\infty$		$l^{-\infty} = +\infty$
$l > 1$	0		$l^{0} = 1$
	$+\infty$		$l^{+\infty} = +\infty$
	$-\infty$		$l^{-\infty} = 0$

Nella tabella ci sono tre forme indeterminate: $+\infty^{\,0} = ?$ $\quad 0^{\,0} = ?$ $\quad 1^{\infty} = ?$

FORME INDETERMINATE

Nei teoremi precedenti abbiamo osservato che esistono varie forme indeterminate. Attraverso alcuni esempi esaminiamo come eliminare queste forme di indeterminazione.

Limite della funzione polinomiale	*con forma indeterminata* $+\infty - \infty = ?$

Per calcolare il limite di una funzione polinomiale $\lim_{x\to+\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)$

occorre raccogliere la variabile di grado massimo x^n :

$$= \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

constatare che: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = 0$

riscrivere il limite nella forma equivalente:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n$$

Si conclude pertanto che:

Il limite di una funzione polinomiale per $x \to +\infty$ è dato limite del termine di grado massimo
$\lim_{x\to+\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n$

Il metodo è valido anche per i limiti di funzioni per $x \to -\infty$.

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 3x^4 + 5) = (+\infty - \infty = ?)$$

Per eliminare la forma indeterminata raccogliamo la variabile x di grado massimo.

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 3 + \frac{5}{x^4}\right) = -\infty$$

perchè: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - 3 + \frac{5}{x^4}\right) = -3$

mentre $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$. *Pertanto per il teorema del prodotto si ha:* $-3 \cdot (+\infty) = -\infty$

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 4x^3 + 2x + 5) = (+\infty - \infty = ?)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 4x^3 + 2x + 5) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - 4 + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{5}{x^3}}_{0}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-4x^3) = -\infty .$$

Limite della funzione razionale fratta	*con forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty} = ?$

Per calcolare il limite di una funzione razionale fratta $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p}$

occorre raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^p \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right)}$$

constatare che: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right) = 0$

riscrivere il limite nella forma equivalente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^p \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p}$$

Si conclude pertanto che:

Il limite di una funzione razionale fratta per $x \to +\infty$ è dato dal limite del rapporto dei termini di grado massimo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p} = \begin{cases} \pm\infty & se \;\; n > p \\ 0 & se \;\; n < p \\ \frac{a_0}{b_0} & se \;\; n = p \end{cases}$$

Il metodo è valido anche per i limiti di funzioni per $x \to -\infty$.

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}\ .$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{5}{x^3} - 2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3x}{2} = -\infty\ .$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{3}{x} - 5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x} = 0\ .$$

Limite della funzione razionale fratta	*con forma indeterminata* $\frac{0}{0} = ?$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_{p-1} x + b_p} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Per calcolare il limite di una funzione razionale fratta che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0} = ?$ occorre:

1. scomporre in fattori i due polinomi (*con il metodo di Ruffini si dividono i due polinomi per il binomio* $x - x_0$)
2. semplificare il binomio $x - x_0$.

Esempio 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 2} \frac{3x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x}{(x+2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} .$$

Esempio 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{4 - x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(2+x) \cdot (2-x)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(2-x) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(2+x) \cdot (2-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x^2 - 2x - 4}{2 + x} = \frac{-12}{4} = -3 .$$

Esempio 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{2x^4 - 5x^3 + 8} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) =$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

	1	0	−3	0	−4
2		+2	+4	+2	+4
	1	+2	+1	+2	=

	2	−5	0	0	+8
2		+4	−2	−4	−8
	2	−1	−2	−4	=

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 2)}{(x-2) \cdot (2x^3 - x^2 - 2x - 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{2x^3 - x^2 - 2x - 4} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 + 2}{2 \cdot 2^3 - 2^2 - 2 \cdot 2 - 4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Limite della funzione irrazionale fratta	*con forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty} = ?$

Esempio 1

Nel caso in cui il limite si presenta nella forma indeterminata $\left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$ occorre:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Portare fuori dal segno di radice il termine appena raccolto, ricordando che:

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to \infty} |x| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (+x) \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (-x) \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 1 \qquad perchè \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Esempio 2

Nel caso in cui il limite si presenta nella forma indeterminata $\left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$ occorre:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+\sqrt{3x^2-5}}{2x} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} = ?\right)$$

raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\sqrt{x^2\left(3-\frac{5}{x^2}\right)}}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+(-x)\cdot\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{2x}-\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Limite della funzione irrazionale fratta	*con forma indeterminata* $\frac{0}{0} = ?$

Esempio 1

Nel caso in cui il limite si presenta nella forma indeterminata $\left(\frac{0}{0} = ?\right)$ occorre:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

moltiplicare e dividere per il fattore che razionalizza il numeratore:

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x^2-3x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

scomporre in fattori il polinomio che da origine alla forma indeterminata:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & -4 \\ 4 & & +4 & +4 \\ \hline & 1 & +1 & = \end{array} \qquad = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\cdot(x+1)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+1)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}\ .$$