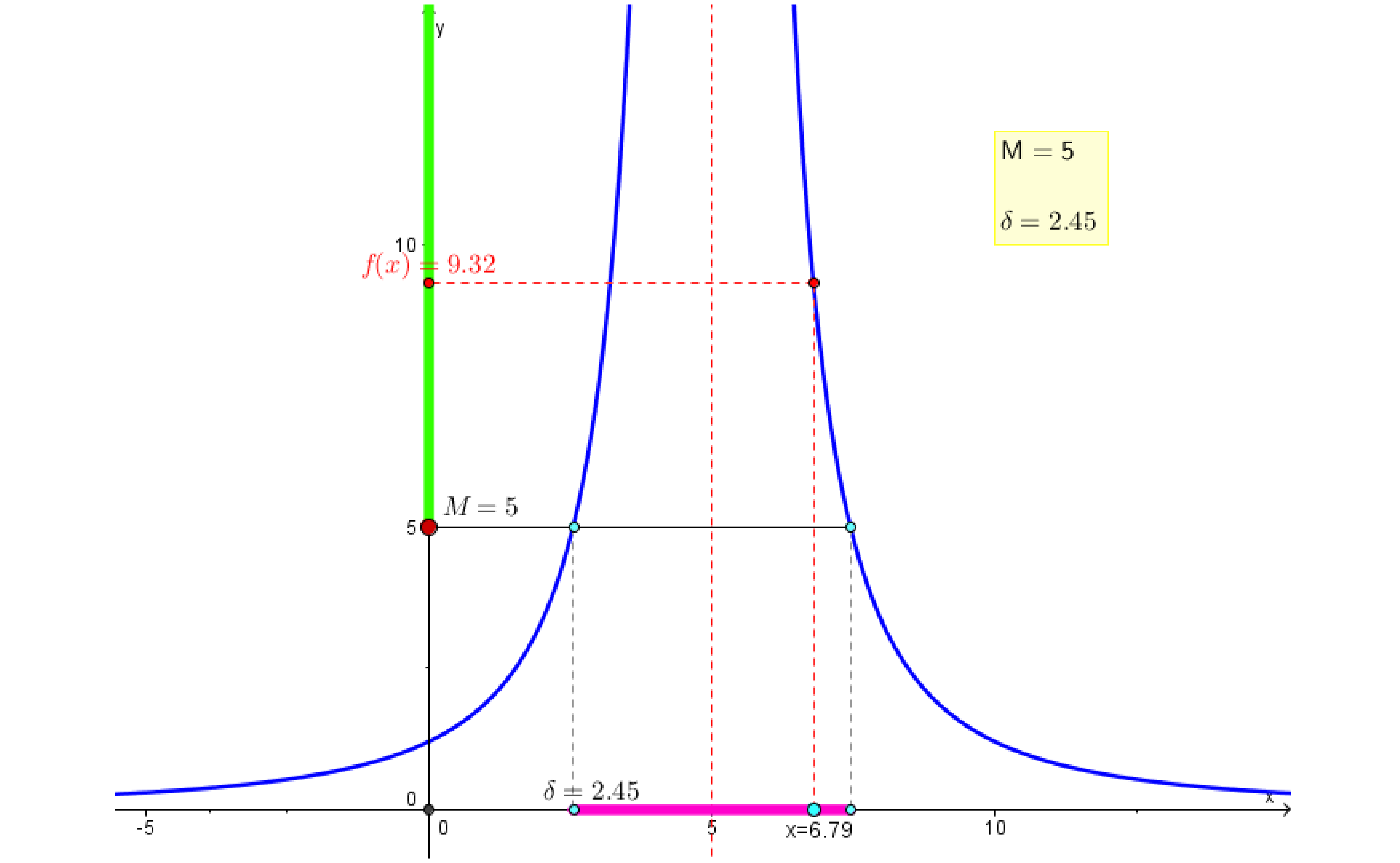
LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_{x_0} \quad / \quad f(x) > M\,, \quad \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ *Se, comunque si scelga un intorno* $I^y_{+\infty} = \left]M\,,+\infty\right[$ *esiste sempre un intorno* $I_{x_0} = \left]\,x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\right[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ $\quad f(x) > M$.



Esempio

$\lim_{x \to 5} \dfrac{30}{(x-5)^2} = +\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5 \quad / \quad \dfrac{30}{(x-5)^2} > M\,, \quad \forall x \in I_5 - \{5\}$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{(x-5)^2} > M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 5 .

Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{(x-5)^2} > M$

Essendo i due membri entrambi positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

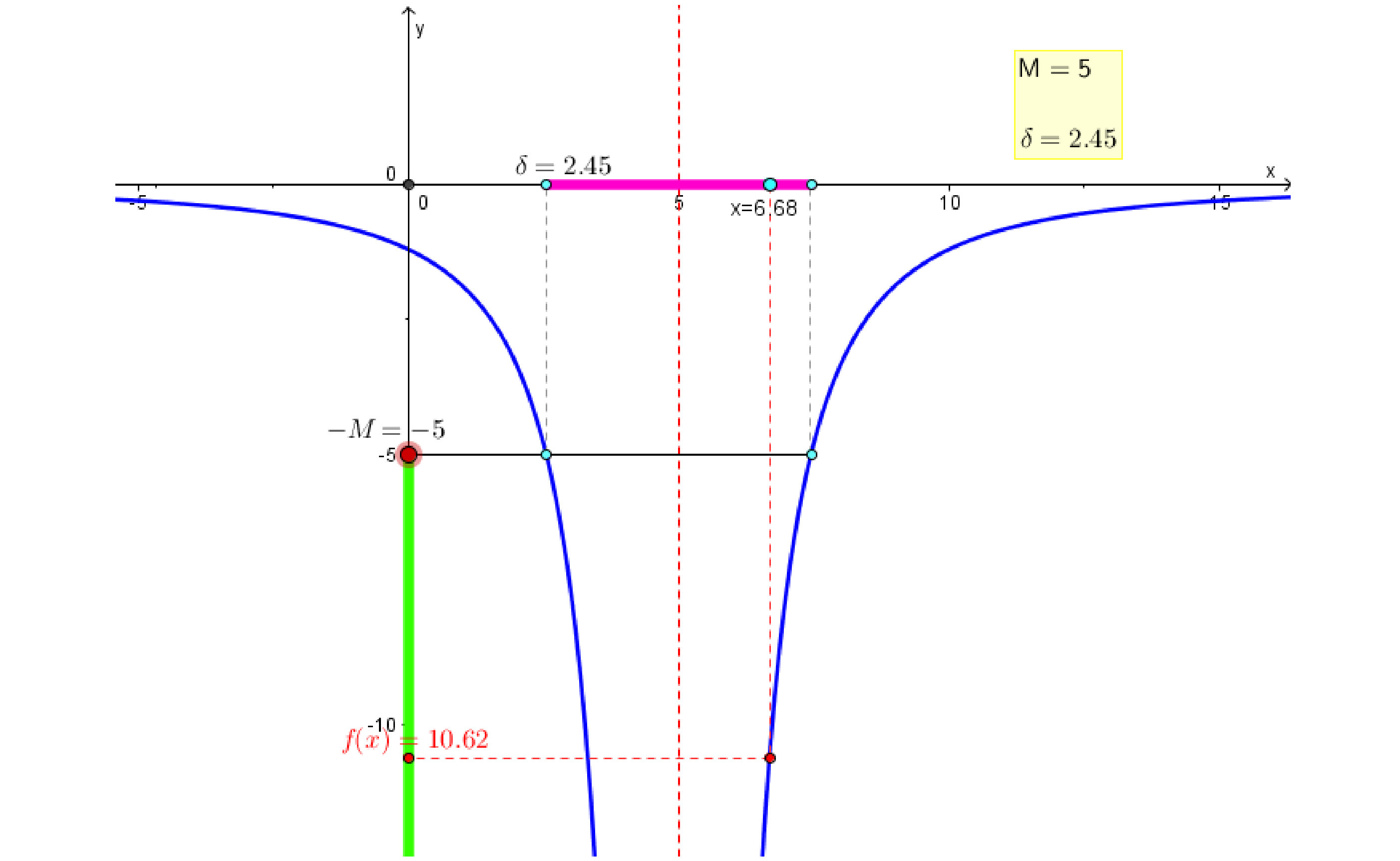
$\frac{(x-5)^2}{30} < \frac{1}{M}$; $\qquad (x-5)^2 < \frac{30}{M}$;

applicando la radice quadrata ad entrambi i membri si ottiene:

$|x-5| < \sqrt{\frac{30}{M}}$; $\qquad -\sqrt{\frac{30}{M}} < x - 5 < +\sqrt{\frac{30}{M}}$; $\qquad 5 - \sqrt{\frac{30}{M}} < x < 5 + \sqrt{\frac{30}{M}}$.

Tenendo conto del dominio, l'insieme delle soluzioni è l'intorno di 5 $\quad I_5 = \left]5 - \sqrt{\frac{30}{M}}\ ,\ 5 + \sqrt{\frac{30}{M}}\right[$ privato del punto 5 . $\left(\textit{Il valore di } \delta \text{ è } \boldsymbol{\delta} = \sqrt{\frac{\mathbf{30}}{\boldsymbol{M}}}\right)$.

LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_{x_0} \quad / \quad f(x) < -M\,, \quad \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}$ *Se, comunque si scelga un intorno* $I^{y}_{-\infty} = \left]-\infty\,, -M\right[$ *esiste sempre un intorno* $I_{x_0} = \left]\,x_0-\delta\,,\ x_0+\delta\right[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \quad f(x) < -M$.



Esempio

$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{-30}{(x-5)^2} = -\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5 \quad / \quad \dfrac{-30}{(x-5)^2} < -M\,, \quad \forall x \in I_5 - \{5\}$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{-30}{(x-5)^2} < -M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 5 .

Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{-30}{(x-5)^2} < -M$

Cambiando di segno entrambi imembri si ottiene: $\frac{30}{(x-5)^2} > M$

Essendo i due membri entrambi positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

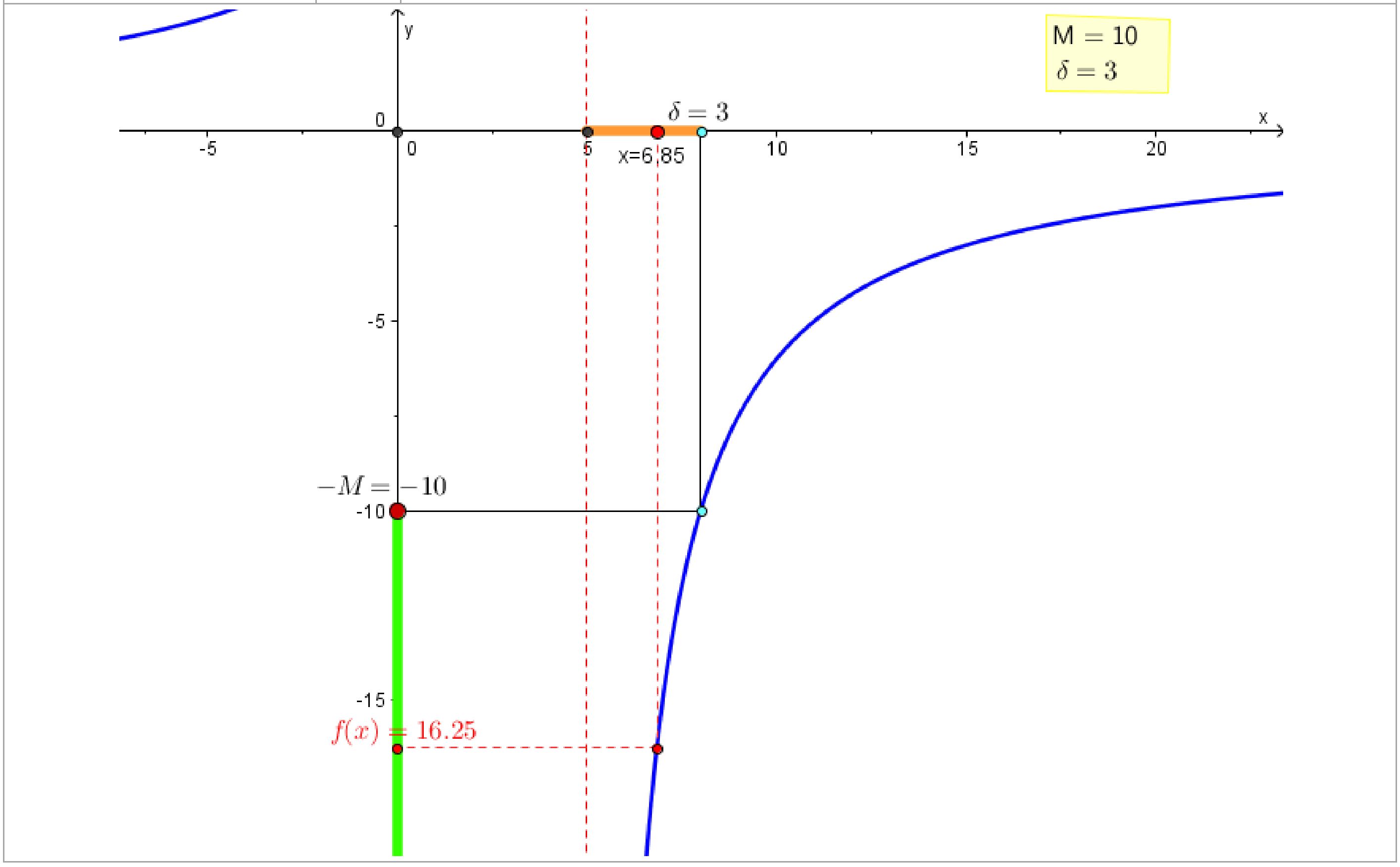
$\frac{(x-5)^2}{30} < \frac{1}{M}$; $\quad (x-5)^2 < \frac{30}{M}$;

applicando la radice quadrata ad entrambi i membri si ottiene:

$|x-5| < \sqrt{\frac{30}{M}}$; $\quad -\sqrt{\frac{30}{M}} < x-5 < +\sqrt{\frac{30}{M}}$; $\quad 5-\sqrt{\frac{30}{M}} < x < 5+\sqrt{\frac{30}{M}}$.

Tenendo conto del dominio, l'insieme delle soluzioni è l'intorno di 5 $\quad I_5 = \left]5-\sqrt{\frac{30}{M}}\,,\ 5+\sqrt{\frac{30}{M}}\right[$ privato del punto 5 . $\left(\mathit{Il\ valore\ di\ } \delta \ \text{è}\ \ \delta = \sqrt{\frac{30}{M}}\right)$.

LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_{x_0}^+ \quad / \quad f(x) < -M\,, \quad \forall x \in I_{x_0}^+$
		Se, comunque si scelga un intorno $I_{-\infty}^{y} = \,]-\infty\,, -M[$ *esiste sempre un intorno destro* $I_{x_0}^+ = \,]\,x_0\,,\ x_0+\delta[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0}^+ \quad f(x) < -M$.



Esempio

$\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{30}{5-x} = -\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5^+ \quad / \quad \dfrac{30}{5-x} < -M\,, \quad \forall x \in I_5^+$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{5-x} < -M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno destro di 5 .

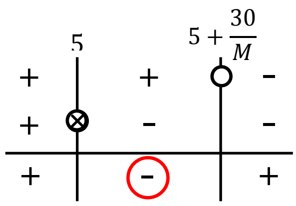
Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{5-x} < -M$:

$\frac{30}{5-x} < -M$; $\quad \frac{30}{5-x} + M < 0$; $\quad \frac{30+M(5-x)}{5-x} < 0$; $\quad \frac{30+5M-Mx}{5-x} < 0$;

Determiniamo i segni dei due termini della frazione:

$30 + 5M - Mx > 0 \qquad Mx < 5M + 30 \qquad x < 5 + \frac{30}{M}$

$5 - x > 0 \qquad -x > -5 \qquad x < 5$

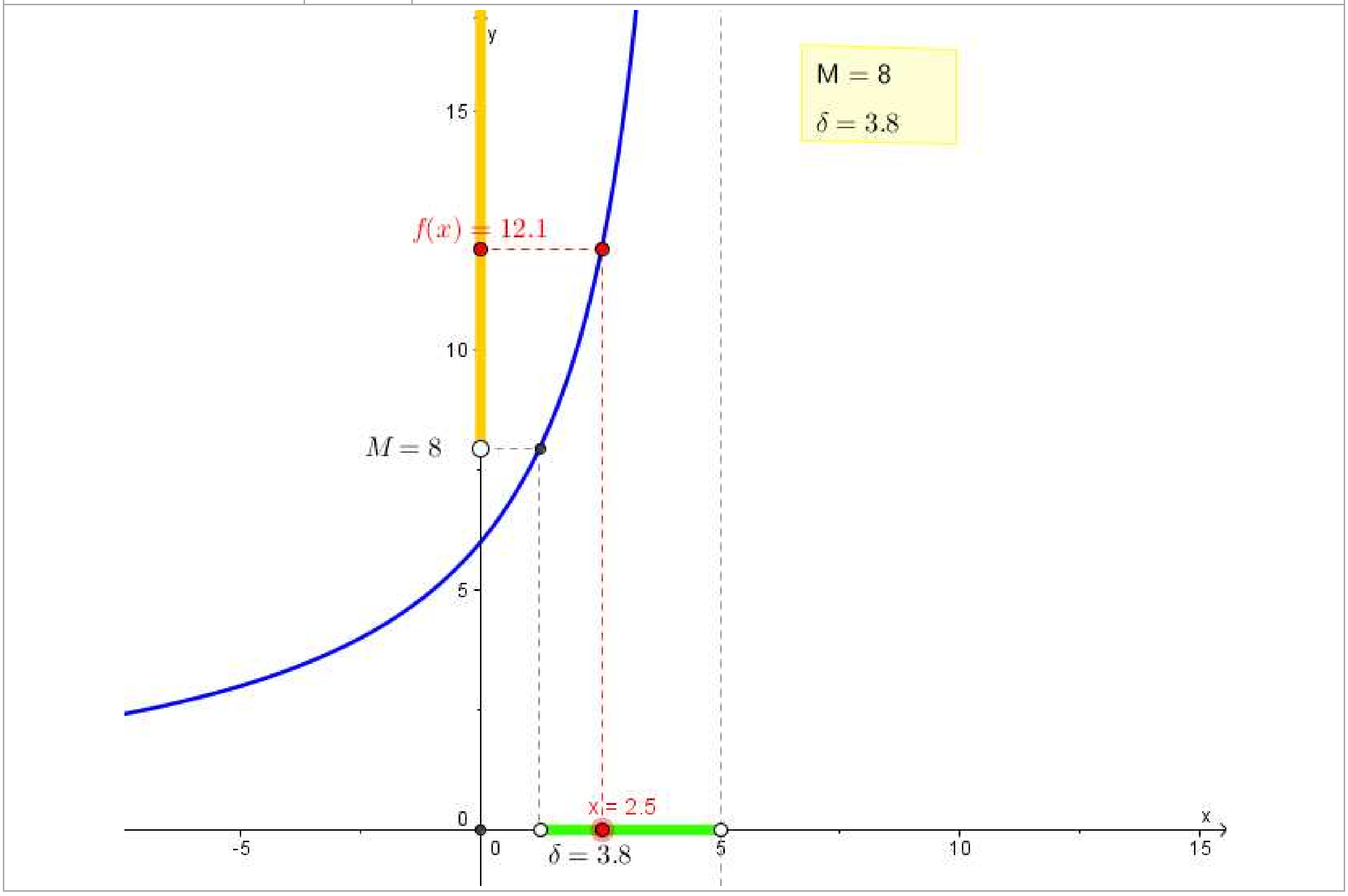


Si ottiene: $5 < x < 5 + \frac{30}{M}$.

Pertanto, essendo l'insieme delle soluzioni un intorno destro di 5 $\quad I_5^+ = \left]5\,,\ 5+\frac{30}{M}\right[$ il limite è verificato.

$\left(\textit{Il valore di } \delta \ \text{ è } \ \delta = \frac{30}{M}\right)$.

LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M>0 \quad \exists\, I_{x_0}^- \quad / \quad f(x) > M\,, \quad \forall x \in I_{x_0}^-$ *Se, comunque si scelga un intorno* $I_{+\infty}^{y} = \left]M\,,+\infty\right[$ *esiste sempre un intorno sinistro* $I_{x_0}^- = \left]\,x_0-\delta\,,x_0\right[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0}^-$ $\quad f(x) > M$



Esempio

$\lim_{x\to 5^-} \dfrac{30}{5-x} = +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M>0 \quad \exists\, I_5^- \quad / \quad \dfrac{30}{5-x} > M\,, \quad \forall x \in I_5^-$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{5-x} > M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno sinistro di 5 .

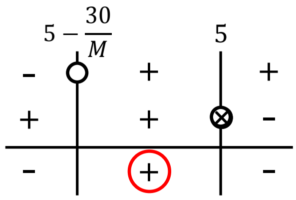
Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{5-x} > M$:

$\frac{30}{5-x} > M$; $\quad \frac{30}{5-x} - M > 0$; $\quad \frac{30-M(5-x)}{5-x} > 0$; $\quad \frac{30-5M+Mx}{5-x} > 0$;

Determiniamo i segni dei due termini della frazione:

$30-5M+Mx > 0 \qquad Mx > 5M-30 \qquad x > 5-\frac{30}{M}$

$5-x>0 \qquad -x>-5 \qquad x<5$

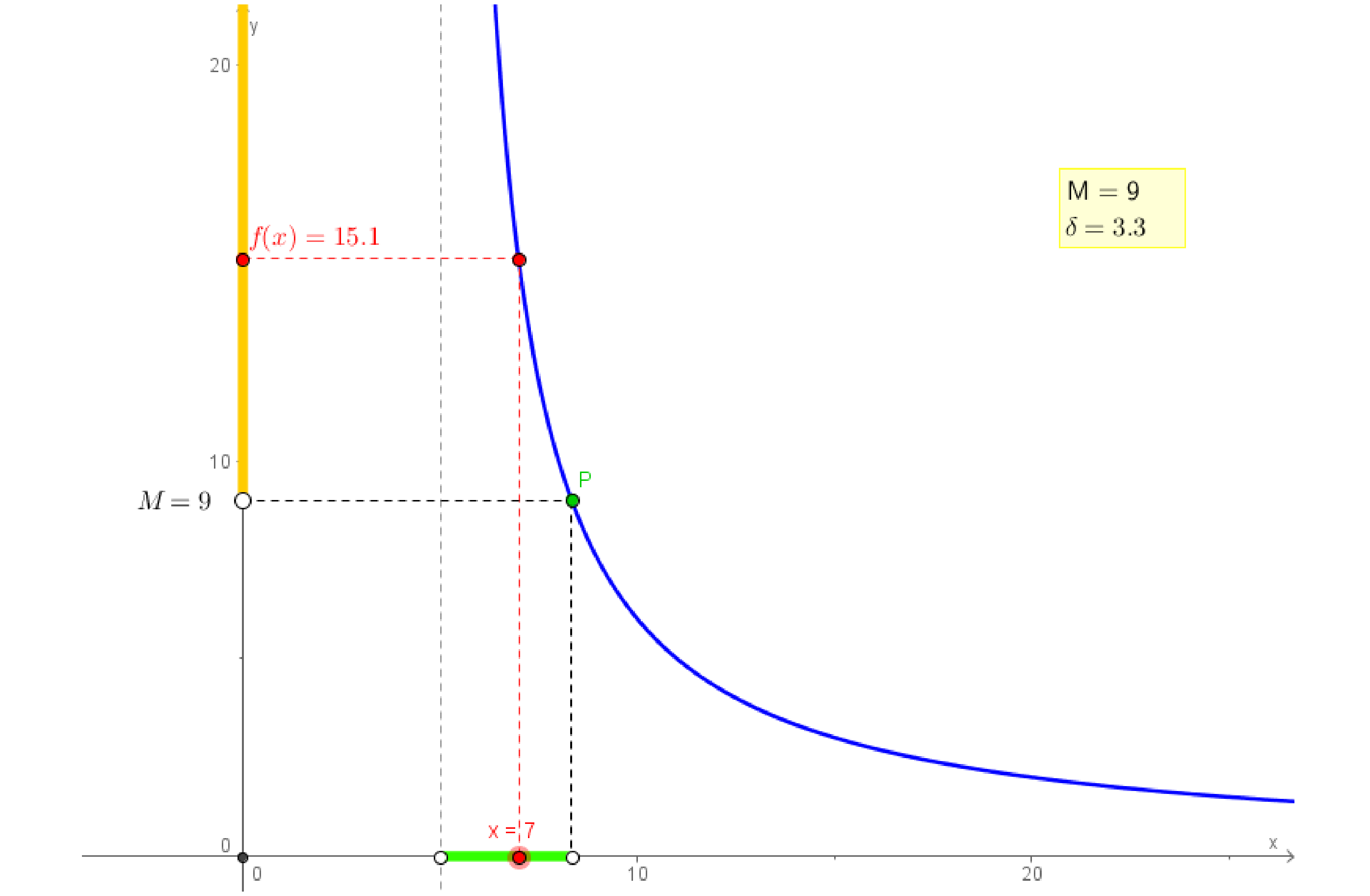


Si ottiene: $5-\frac{30}{M} < x < 5$.

Pertanto, essendo l'insieme delle soluzioni un intorno destro di 5 $\quad I_5^+ = \left]5-\frac{30}{M}\,,\ 5\right[$ il limite è verificato.

$\left(\textit{Il valore di } \delta \ \text{è} \ \ \delta = \frac{30}{M}\right)$.

LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_{x_0}^{+} \quad / \quad f(x) > M\,, \quad \forall x \in I_{x_0}^{+}$ *Se, comunque si scelga un intorno* $I_{+\infty}^{y} = \,]M\,, +\infty[$ *esiste sempre un intorno destro* $I_{x_0}^{+} = \,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,,[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0}^{+} \quad f(x) > M$



Esempio

$\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{30}{x-5} = +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5^{+} \quad / \quad \dfrac{30}{x-5} > M\,, \quad \forall x \in I_5^{+}$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{x-5} > M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno destro di 5 .

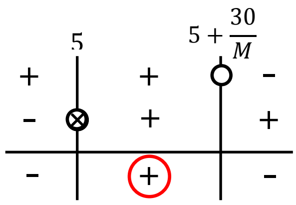
Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{x-5} > M$:

$\frac{30}{x-5} > M$; $\quad \frac{30}{x-5} - M > 0$; $\quad \frac{30-M(x-5)}{x-5} > 0$; $\quad \frac{30-Mx+5M}{x-5} > 0$;

Determiniamo i segni dei due termini della frazione:

$30 - Mx + 5M > 0 \qquad Mx < 5M + 30 \qquad x < 5 + \frac{30}{M}$

$x - 5 > 0 \qquad x > 5 \qquad x > 5$

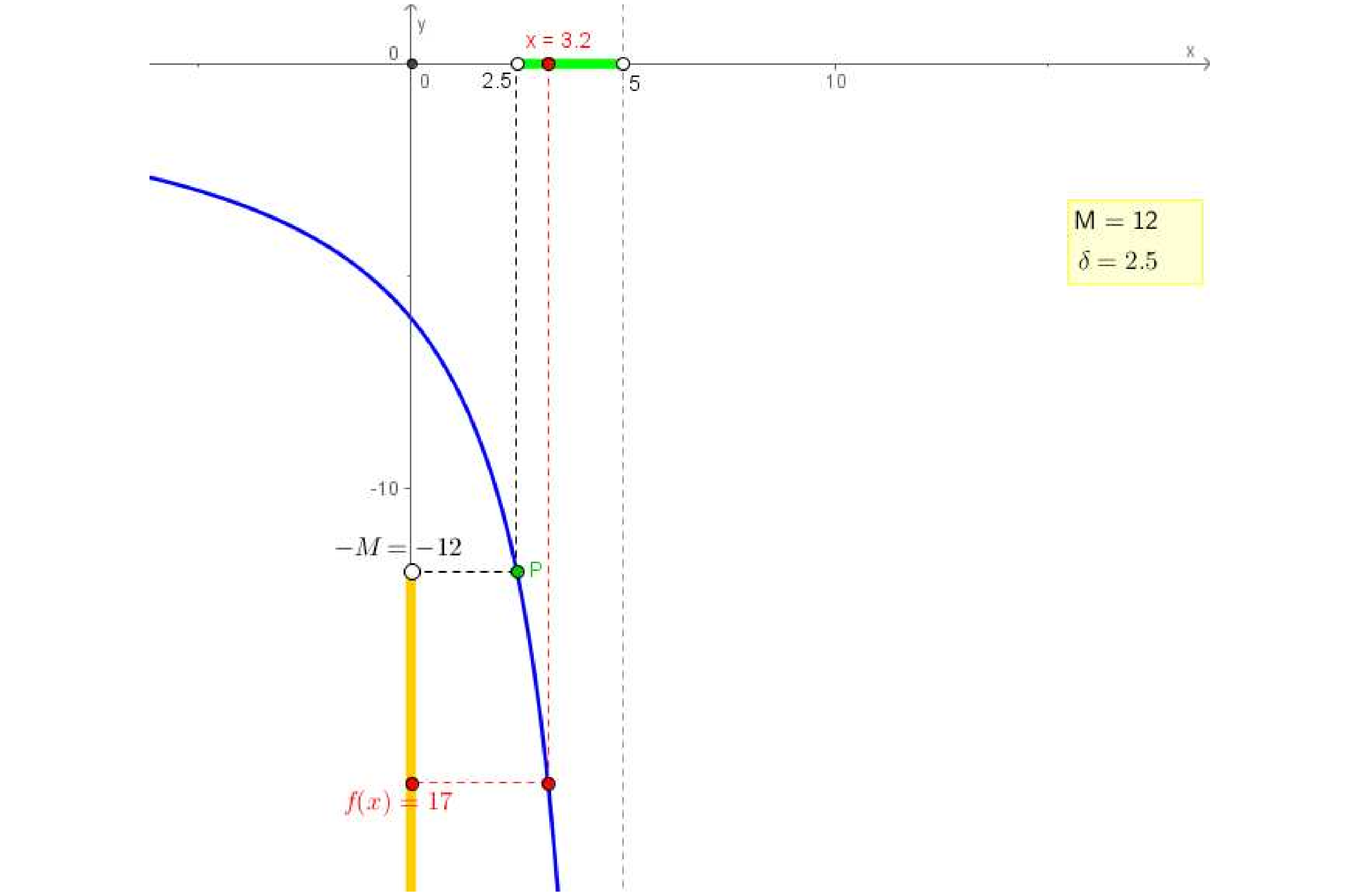


Si ottiene: $5 < x < 5 + \frac{30}{M}$.

Pertanto, essendo l'insieme delle soluzioni un intorno destro di 5 $\quad I_5^{+} = \left]5\,,\ 5 + \frac{30}{M}\right[$ il limite è verificato.

$\left(\textit{Il valore di } \delta \ \text{è} \ \ \delta = \frac{30}{M}\right)$.

LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_{x_0}^- \quad / \quad f(x) < -M\,, \quad \forall x \in I_{x_0}^-$
		Se, comunque si scelga un intorno $I_{-\infty}^{y} = \,]-\infty\,, -M[$ *esiste sempre un intorno sinistro* $I_{x_0}^- = \,]\,x_0 - \delta\,,\; x_0[$ *tale che* $\forall x \in I_{x_0}^-$ $f(x) < -M$



Esempio

$\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{30}{x-5} = -\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5^- \quad / \quad \dfrac{30}{x-5} < -M\,, \quad \forall x \in I_5^-$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{x-5} < -M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno destro di 5 .

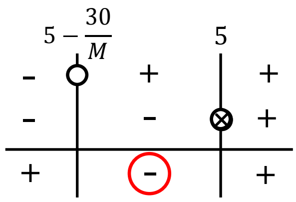
Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{x-5} < -M$:

$\frac{30}{x-5} < -M$; $\quad \frac{30}{x-5} + M < 0$; $\quad \frac{30+M(x-5)}{x-5} < 0$; $\quad \frac{30+Mx-5M}{x-5} < 0$;

Determiniamo i segni dei due termini della frazione:

$30 + Mx - 5M > 0 \qquad Mx > 5M - 30 \qquad x > 5 - \frac{30}{M}$

$x - 5 > 0 \qquad x > 5 \qquad x > 5$



Si ottiene: $5 - \frac{30}{M} < x < 5$.

Pertanto, essendo l'insieme delle soluzioni un intorno destro di 5 $\quad I_5^+ = \left]5 - \frac{30}{M}\,,\; 5\right[$ il limite è verificato.

$\left(Il\ valore\ di\ \delta \ \text{è} \ \ \delta = \frac{30}{M}\right)$.

ALTRI ESEMPI

Esempio 1

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{x^2} = +\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in \left]0 - \delta\,, 0 + \delta\right[\ \wedge \ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5}{x^2} > M$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{5}{x^2} > M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 0 .

$\frac{5}{x^2} > M$; $\quad \frac{5}{x^2} - M > 0$; $\quad \frac{5 - Mx^2}{x^2} > 0$ essendo il denominatore sempre positivo, discutiamo il segno del solo numeratore: $5 - Mx^2 > 0$.

Risolvendo l'equazione associata $5 - Mx^2 = 0$ si ottiene: $Mx^2 = 5$; $\quad x^2 = \frac{5}{M}$; $\quad x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{5}{M}}$.

Le soluzioni della disequazione $x^2 - \frac{5}{M} < 0$ sono: $-\sqrt{\frac{5}{M}} < x < \sqrt{\frac{5}{M}}$.

Questa scrittura rappresenta effettivamente un intorno completo del valore $x = 0$.

Il limite è, pertanto, verificato.