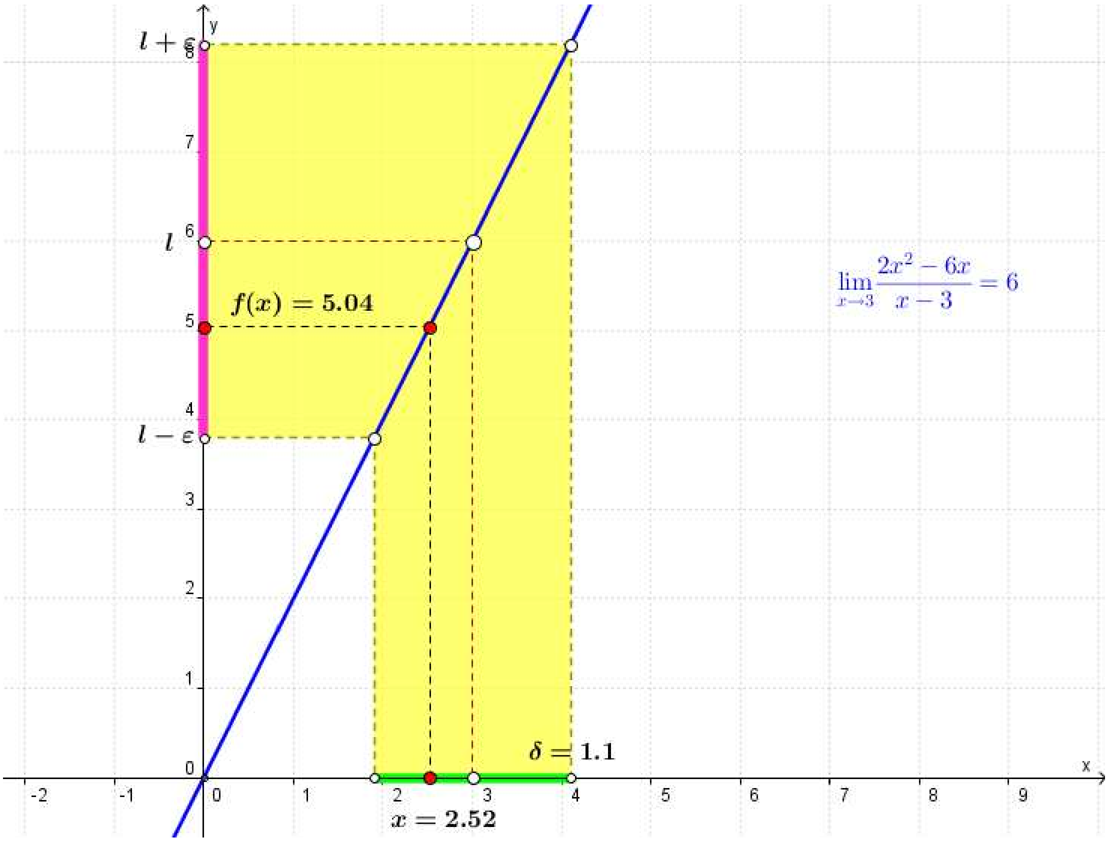
LIMITI

Verifica di limiti

LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_{x_0} \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_{x_0},\ x \neq x_0$ *Per ogni intorno* $I_l =]\, l - \varepsilon\,,\ l - \varepsilon[$ **(scelto piccolo quanto si vuole)**, *esiste sempre un intorno* $I_{x_0} =]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta[$ *tale che* $\forall \in I_{x_0} - \{x_0\}\,,\quad f(x) \in I_l\,.$



Esempio

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-6x}{x-3} = 6$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_3 \quad / \quad \left\lvert \dfrac{2x^2-6x}{x-3} - 6 \right\rvert < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_3,\ x \neq 3$

Occorre verificare che la disequazione $\left\lvert \frac{2x^2-6x}{x-3} - 6 \right\rvert < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 6 .

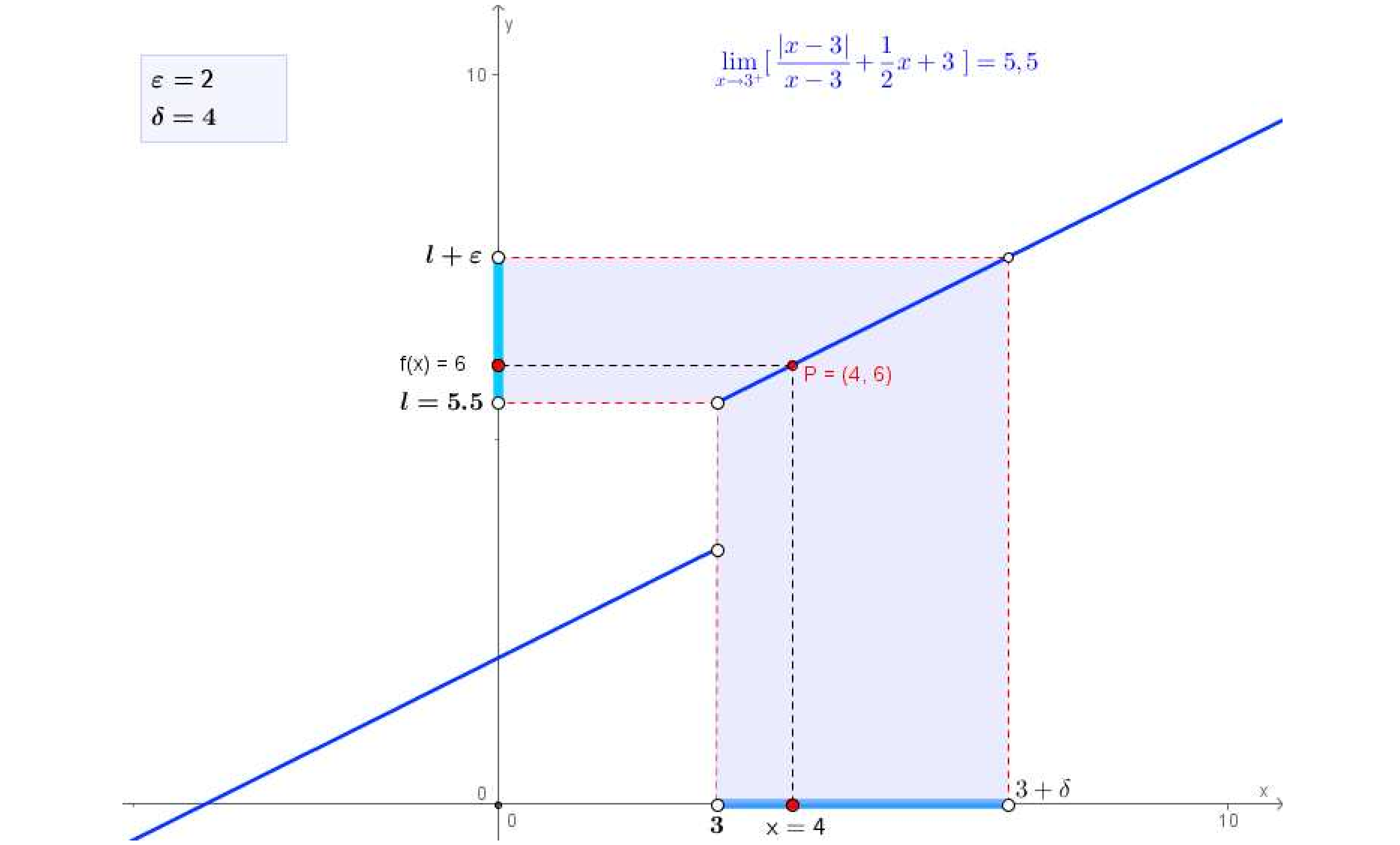
Risolviamo pertanto la disequazione: $\left\lvert \frac{2x^2-6x}{x-3} - 6 \right\rvert < \varepsilon$

$\left\lvert \frac{2x(x-3)}{x-3} - 6 \right\rvert < \varepsilon\,;\qquad \lvert 2x-6 \rvert < \varepsilon\,;\qquad -\varepsilon < 2x - 6 < +\varepsilon\,;\qquad 6-\varepsilon < 2x < 6+\varepsilon\,;\qquad 3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}\,.$

Tenendo conto del dominio, l'insieme delle soluzioni è l'intorno di 3 $\quad I_3 = \left]3-\frac{\varepsilon}{2}\,,\ 3+\frac{\varepsilon}{2}\right[$ privato del punto 3 .

$\left(\mathit{Il\ valore\ di}\ \delta\ \text{è}\ \ \delta = \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

LIMITE FINITO DESTRO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_{x_0}^+ \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon \,, \quad \forall x \in I_{x_0}^+$
		Per ogni intorno $I_l =]\, l-\varepsilon \,,\ l-\varepsilon[$ (scelto piccolo quanto si vuole), *esiste sempre un intorno destro* $I_{x_0}^+ =]\, x_0 \,,\ x_0+\delta[$ *tale che* $\forall \in I_{x_0}^+ \,, \quad f(x) \in I_l$.



Esempio

$\lim_{x\to 3^+} \left[\frac{\lvert x-3 \rvert}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 \right] = 5{,}5$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_3^+ \quad / \quad \lvert f(x) - 5{,}5 \rvert < \varepsilon \,, \quad \forall x \in I_3^+$

Occorre verificare che la disequazione $\left| \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 - 5{,}5 \right| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno destro di 3 .

Esplicitiamo la funzione valore assoluto:

$$y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} \frac{+(x-3)}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 & x \geq 3 \\ \frac{-(x-3)}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 & x < 3 \end{cases} \qquad y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x + 3 & x \geq 3 \\ -1 + \frac{1}{2}x + 3 & x < 3 \end{cases}$$

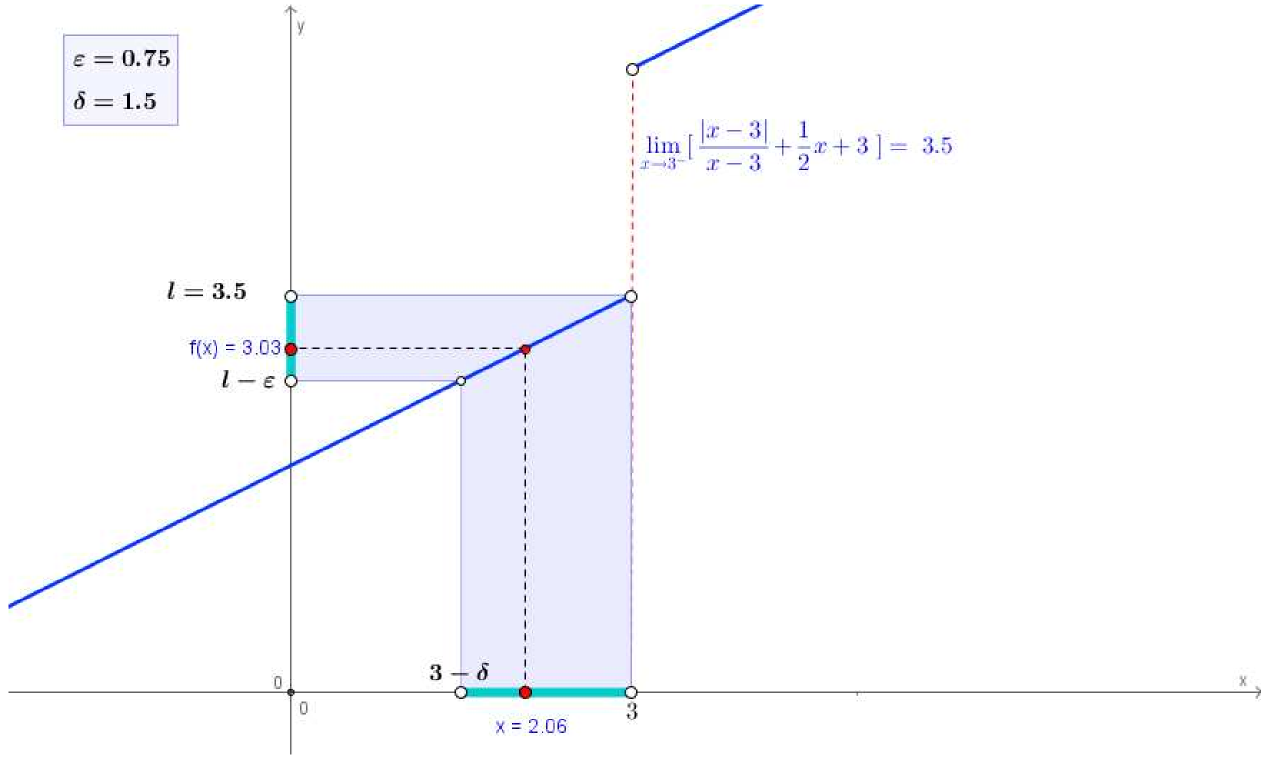
$$y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & x < 3 \end{cases}$$

Pertanto la disequazione $\left| \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 - 5{,}5 \right| < \varepsilon$ si riduce alla disequazione $\left| \frac{1}{2}x + 4 - 5{,}5 \right| < \varepsilon$.

$\left| \frac{1}{2}x - 1{,}5 \right| < \varepsilon \,; \qquad -\varepsilon < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} < +\varepsilon \,; \qquad \frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}x < \frac{3}{2} + \varepsilon \,; \qquad 3 - 2\varepsilon < x < 3 + 2\varepsilon$.

Quindi la disequazione è verificata in un intorno completo di 3. In particolare, è verificata in un suo sottoinsieme, ossia l'intorno destro di 3 : $\quad I_3^+ =]3 \,,\ 3 + 2\varepsilon[$

LIMITE FINITO SINISTRO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO		
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_{x_0}^- \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_{x_0}^-$
		Per ogni intorno $I_l =]\, l - \varepsilon\,,\ l - \varepsilon [$ (scelto piccolo quanto si vuole), *esiste sempre un intorno sinistro* $I_{x_0}^- =]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 [$ *tale che* $\forall \in I_{x_0}^-\,,$ $f(x) \in I_l$.



Esempio

$\lim\limits_{x \to 3^-} \left[\dfrac{\lvert x-3 \rvert}{x-3} + \dfrac{1}{2}x + 3 \right] = 3{,}5$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_3^- \quad / \quad \lvert f(x) - 3{,}5 \rvert < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_3^-$

Occorre verificare che la disequazione $\left| \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 - 3{,}5 \right| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno sinistro di 3 .

Esplicitiamo la funzione valore assoluto:

$$y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} \frac{+(x-3)}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 & x \geq 3 \\ \frac{-(x-3)}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 & x < 3 \end{cases} \qquad y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x + 3 & x \geq 3 \\ -1 + \frac{1}{2}x + 3 & x < 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & x < 3 \end{cases}$$

Pertanto la disequazione $\left| \frac{|x-3|}{x-3} + \frac{1}{2}x + 3 - 3{,}5 \right| < \varepsilon$ si riduce alla disequazione $\left| \frac{1}{2}x + 2 - 3{,}5 \right| < \varepsilon$.

$\left| \frac{1}{2}x - 1{,}5 \right| < \varepsilon\,;$ $\quad -\varepsilon < \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} < +\varepsilon\,;$ $\quad \frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}x < \frac{3}{2} + \varepsilon\,;$ $\quad 3 - 2\varepsilon < x < 3 + 2\varepsilon$.

Quindi la disequazione è verificata in un intorno completo di 3. In particolare, è verificata in un suo sottoinsieme, ossia l'intorno sinistro di 3 : $\quad I_3^- =]3 - 2\varepsilon\,,\ 3[$