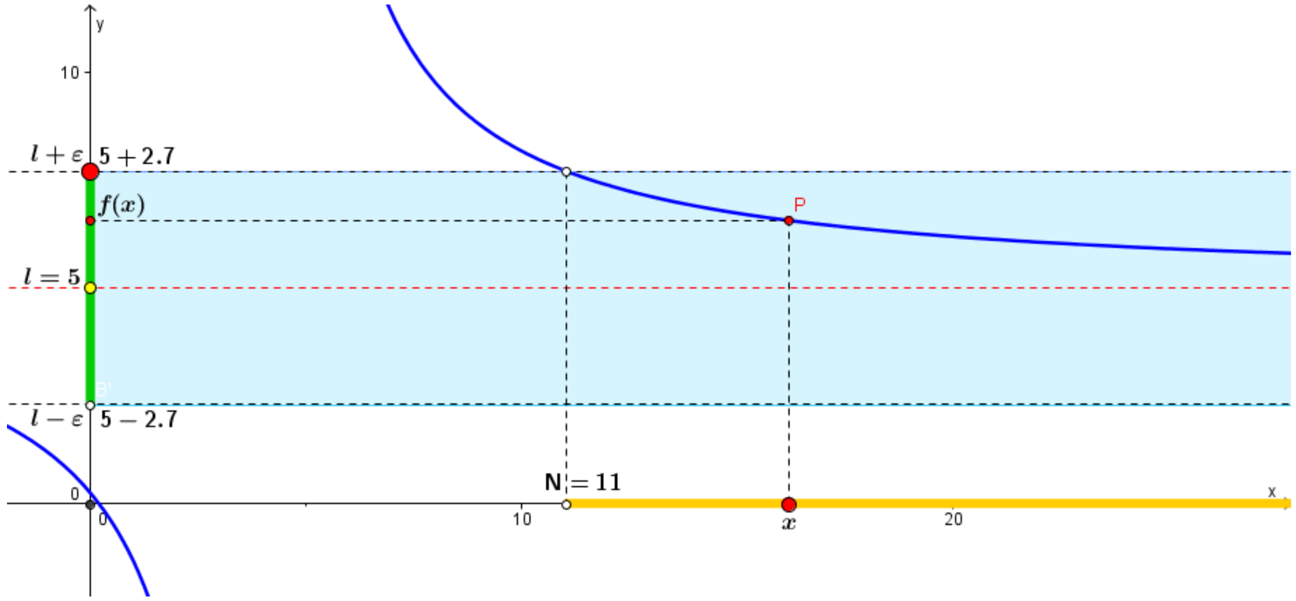
LIMITI

Verifica di limiti

LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE ALL'INFINITO		
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \quad / \quad \mid f(x) - l \mid < \varepsilon\,, \quad \forall x > N$
		Se, comunque si scelga un intorno $I_l = \,]l-\varepsilon\,, l+\varepsilon[$ (scelto piccolo quanto si vuole), *si può determinare in corrispondenza di esso un intorno* $I_{+\infty} = \,]N\,, +\infty[$ *tale che, per ogni* $x \in I_{+\infty}$, *si ha che* $f(x) \in I_l$.



Esempio

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-1}{x-4} = 5$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad / \quad \left\| \dfrac{5x-1}{x-4} - 5 \right\| < \varepsilon\,, \quad \forall x > N$

Occorre verificare che la disequazione $\left|\frac{5x-1}{x-4} - 5\right| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno $I_{+\infty}$.

Risolviamo pertanto la disequazione: $\left|\frac{5x-1}{x-4} - 5\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{5x-1-5(x-4)}{x-4}\right| < \varepsilon\,; \qquad \left|\frac{5x-1-5x+20}{x-4}\right| < \varepsilon\,; \qquad \left|\frac{19}{x-4}\right| < \varepsilon\,;$$

Essendo entrambi i membri positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

$$\left|\frac{x-4}{19}\right| > \frac{1}{\varepsilon}\,; \qquad \frac{|x-4|}{19} > \frac{1}{\varepsilon}\,; \qquad |x-4| > \frac{19}{\varepsilon} \quad \textit{che è equivalente alle due disequazioni :}$$

$$x-4 < -\frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x-4 > \frac{19}{\varepsilon}\,; \qquad \text{cioè} \qquad x < 4 - \frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 4 + \frac{19}{\varepsilon}.$$

Queste ultime due espressioni rappresentano, rispettivamente, un intorno $I_{-\infty}$ e un intorno $I_{+\infty}$.

Avendo trovato fra le soluzioni della disequazione un $I_{+\infty}$ il limite è verificato.

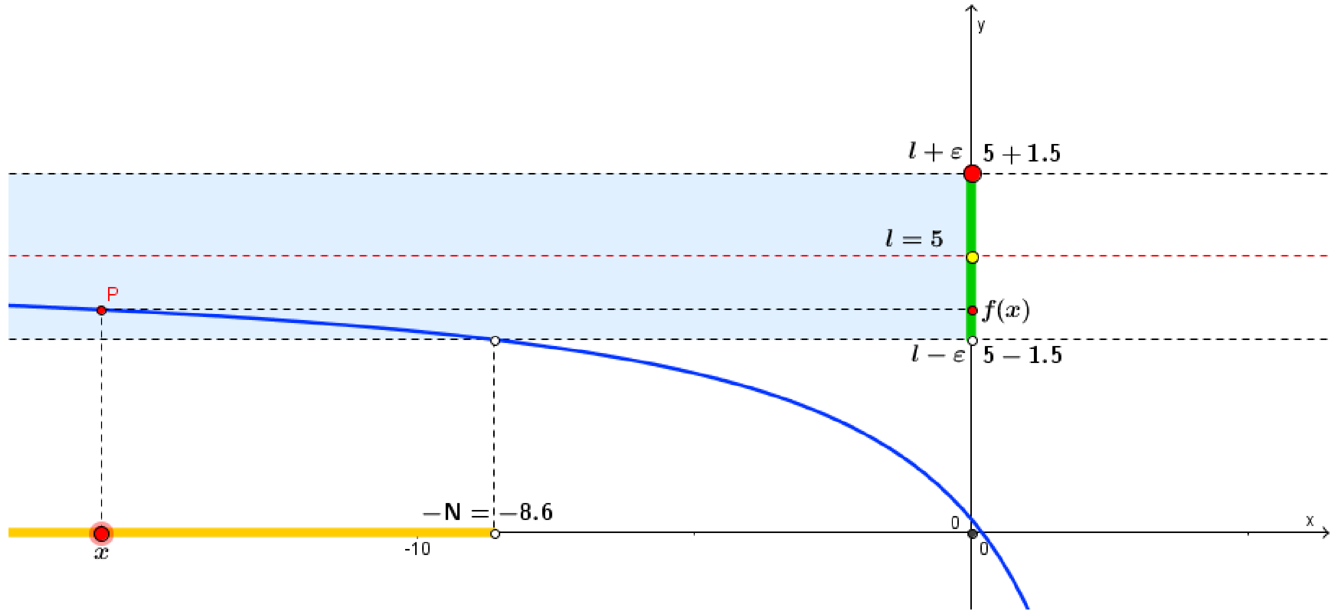
Il valore di N, dipendente da ε, è $N = 4 + \frac{19}{\varepsilon}$.

Più si sceglie ε piccolo, più il valore di N è grande.

Per $\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow N = 4 + \frac{19}{0{,}1} = 4 + 190 = 194$ Per $\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow N = 4 + \frac{19}{0{,}01} = 4 + 1900 = 1904$

LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE ALL'INFINITO

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon \,, \quad \forall x < -N$
		Se, comunque si scelga un intorno $I_l =]l - \varepsilon \,, l + \varepsilon[$ (scelto piccolo quanto si vuole), *si può determinare in corrispondenza di esso un intorno* $I_{-\infty} =]-\infty, -N[$ *tale che, per ogni* $x \in I_{-\infty}$, *si ha che* $f(x) \in I_l$.



Esempio

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-1}{x-4} = 5$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon \,, \quad \forall x < -N$

Occorre verificare che la disequazione $\left| \frac{5x-1}{x-4} - 5 \right| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno $I_{-\infty}$.

Risolviamo pertanto la disequazione: $\left| \frac{5x-1}{x-4} - 5 \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{5x-1-5(x-4)}{x-4} \right| < \varepsilon \,; \qquad \left| \frac{5x-1-5x+20}{x-4} \right| < \varepsilon \,; \qquad \left| \frac{19}{x-4} \right| < \varepsilon \,;$$

Essendo entrambi i membri positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

$$\left| \frac{x-4}{19} \right| > \frac{1}{\varepsilon} \,; \qquad \frac{|x-4|}{19} > \frac{1}{\varepsilon} \,; \qquad |x-4| > \frac{19}{\varepsilon} \qquad \textit{che è equivalente alle due disequazioni} :$$

$$x - 4 < -\frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x - 4 > \frac{19}{\varepsilon} \,; \qquad \text{cioè} \qquad x < 4 - \frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 4 + \frac{19}{\varepsilon} .$$

Queste ultime due espressioni rappresentano, rispettivamente, un intorno $I_{-\infty}$ e un intorno $I_{+\infty}$.

Avendo trovato fra le soluzioni della disequazione un $I_{-\infty}$ il limite è verificato.

Il valore di N, dipendente da ε, è $N = 4 - \frac{19}{\varepsilon}$.

Più si sceglie ε piccolo, più il valore di N è grande.

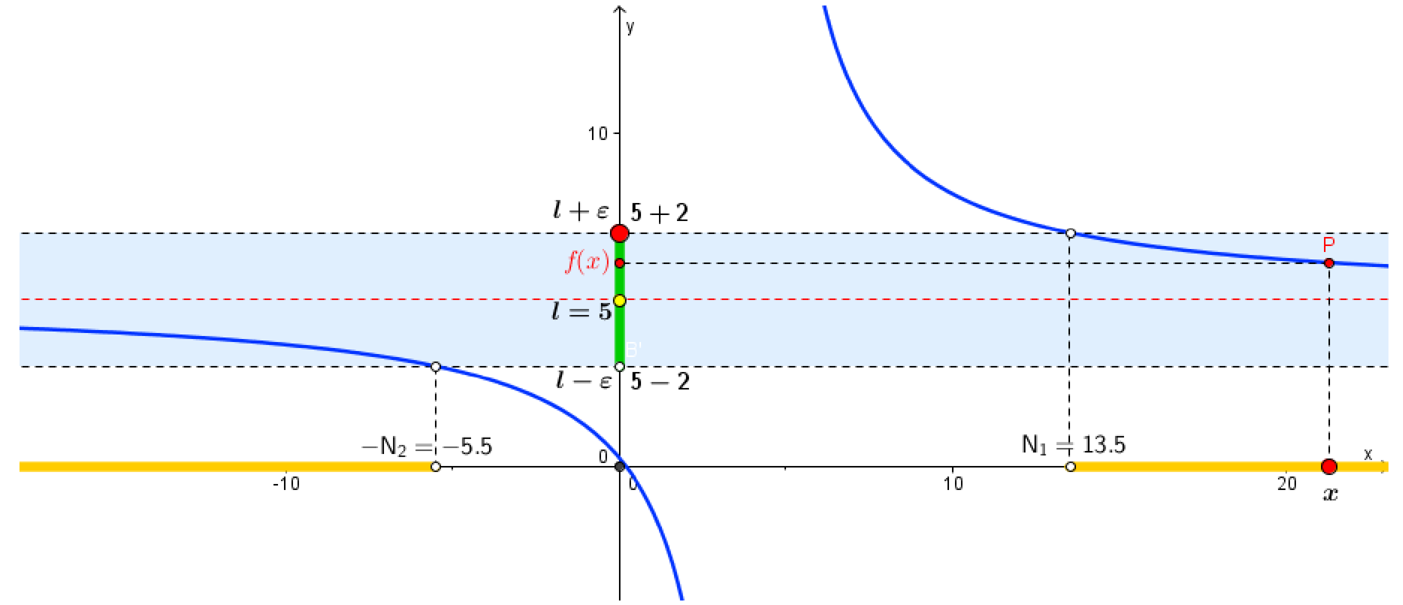
Per $\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow N = 4 - \frac{19}{0{,}1} = 4 - 190 = -186$ Per $\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow N = 4 - \frac{19}{0{,}01} = 4 - 1900 = -1896$

Nota

Avendo trovato fra le soluzioni entrambi gli intorni $I_{-\infty}$ e $I_{+\infty}$ si può dire che: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-1}{x-4} = 5$

LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE ALL'INFINITO

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad / \quad \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon\,, \quad \forall \lvert x \rvert > N$
		Se, comunque si scelga un intorno $I_l =]l - \varepsilon\,, l + \varepsilon[$ (scelto piccolo quanto si vuole), *si può determinare in corrispondenza di esso un intorno* $I_\infty =]-\infty, -N[\ \cup\ ]N, +\infty[$ *tale che, per ogni* $x \in I_\infty$, *si ha che* $f(x) \in I_l$.



Esempio

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x - 1}{x - 4} = 5$	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, I_\infty =]-\infty, -N_2[\ \cup\ ]N_1, +\infty[$ tale che $\left\lvert \dfrac{5x - 1}{x - 4} - 5 \right\rvert < \varepsilon\,, \qquad \forall x \in I_\infty$

Occorre verificare che la disequazione $\left\lvert \frac{5x-1}{x-4} - 5 \right\rvert < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno I_∞ .

Risolviamo pertanto la disequazione: $\left\lvert \frac{5x-1}{x-4} - 5 \right\rvert < \varepsilon$

$$\left\lvert \frac{5x - 1 - 5(x - 4)}{x - 4} \right\rvert < \varepsilon\,; \qquad \left\lvert \frac{5x - 1 - 5x + 20}{x - 4} \right\rvert < \varepsilon\,; \qquad \left\lvert \frac{19}{x - 4} \right\rvert < \varepsilon\,;$$

Essendo entrambi i membri positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

$$\left\lvert \frac{x - 4}{19} \right\rvert > \frac{1}{\varepsilon}\,; \qquad \frac{\lvert x - 4 \rvert}{19} > \frac{1}{\varepsilon}\,; \qquad \lvert x - 4 \rvert > \frac{19}{\varepsilon} \quad \textit{che è equivalente alle due disequazioni}:$$

$$x - 4 < -\frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x - 4 > \frac{19}{\varepsilon}\,; \qquad \text{cioè} \qquad x < 4 - \frac{19}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 4 + \frac{19}{\varepsilon}$$

Queste ultime due espressioni rappresentano, rispettivamente, un intorno $I_{-\infty}$ e un intorno $I_{+\infty}$. Il limite è pertanto, verificato.