LIMITI

Esercizi sul calcolo di limiti

Limiti immediati

Esercizio 1

$\lim_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^7 = +\infty$

Esercizio 2

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^7} = 0^+$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^7} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^7} = +\infty$

Esercizio 3

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[4]{x} = \nexists$ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[5]{x} = -\infty$

Esercizio 4

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^x = 0^+$ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$

Esercizio 5

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 0^+$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = +\infty$ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$

Esercizio 6

$\lim_{x \to -\infty} \log_2 x = \nexists$ $\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$

Esercizio 7

$\lim_{x \to -\infty} \log_{\frac{2}{3}} x = \nexists$ $\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{2}{3}} x = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{2}{3}} x = +\infty$

Esercizio 8

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - x^3) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} x^3 = 3^2 - 3^3 = -18 \ .$$

Esercizio 9

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3^x) = \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 3^x = 2^2 - 3^2 = -5 \ .$$

Esercizio 10

$$\lim_{x \to 0} (\sin x \cdot \cos x) = \lim_{x \to 3} \sin x \cdot \lim_{x \to 3} \cos x = 0 \cdot 1 = 0 \ .$$

Esercizio 11

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (\tan^2 x) = \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \tan x\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \ .$$

Esercizio 12

$$\lim_{x\to 1} \frac{log_3 x}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 1} log_3 x}{\lim_{x\to 1} x^2} = \frac{log_3 1}{1^2} = \frac{0}{1} = 0 .$$

Esercizio 13

$$\lim_{x\to 5^+} \left(x - \frac{3}{x-5}\right) = 5-(+\infty) = -\infty .$$

Esercizio 14

$$\lim_{x\to 5^-} \left(x - \frac{3}{x-5}\right) = 5-(-\infty) = +\infty .$$

Esercizio 15

$$\lim_{x\to 0^+} \left(ln\, x - \frac{3}{x}\right) = -\infty-(+\infty) = -\infty .$$

Esercizio 16

$$\lim_{x\to 0^-} \left(ln\, x - \frac{3}{x}\right) = \nexists .$$

Esercizio 17

$$\lim_{x\to 0^+} [\,(x^2-1)\cdot ln\, x\,] = -1\cdot(-\infty) = +\infty .$$

Esercizio 18

$$\lim_{x\to -\infty} [\,(x^2-1)\cdot ln(-x)\,] = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty .$$

Esercizio 19

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

Esercizio 20

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{ln\, x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^- .$$

Esempio 1

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+5} \;=\; \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Occorre raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} \;=$$

Portare fuori dal segno di radice il termine appena raccolto, ricordando che:

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2} \;=\; \lim_{x\to \infty} |x| \;=\; \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (+x) \\ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (-x) \end{cases}$$

Si ottiene:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} \;=\; \frac{1}{2}$$

$perchè \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5}{x} = 0 \quad e \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

Esempio 2

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+5x-2}{\sqrt{4x^2+3}} \;=\; \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Occorre raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} \;=\; \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \;=\; \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{-x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \;=$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \;=\; -\infty$$

$perchè \quad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

Quindi, il numeratore tende a $+\infty$ mentre il denominatore tende a -2, si conclude che la frazione tende a $-\infty$.

Esempio 3

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+3x-6}}{7x^2+2x+4} \;=\; \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Occorre raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \;=$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\cdot\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \;=\; \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \;=\; 0$$

$perchè \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6}{x^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$

Quindi, il numeratore tende a $\sqrt{5}$, mentre il denominatore tende a $+\infty$, si conclude che la frazione tende a 0.

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right) \;=\; (+\infty-\infty=?) \qquad \textit{Occorre raccogliere la variabile di grado massimo:}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2\right) \;=-\infty$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ *quindi la parentesi tende a* -1. *Pertanto, il limite vale:* $+\infty\cdot(-1)=-\infty$.

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) \;=\; (+\infty-\infty=?)$$

L'esercizio è quasi uguale al precedente, ma se procediamo come prima, otteniamo la forma indeterminata $+\infty\cdot 0$:

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2\right) \;=(-\infty\cdot 0=?)$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ *quindi a* $+\infty\cdot 0=?$

Occorre pertanto, procedere con l'altro metodo, cioè quello della razionalizzazione.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) \;=\; \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} \;=\; \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} \;=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} \;=\; \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} \;=\; 0\,.$$

Per riconoscere il procedimento da utilizzare si osservi che nella radice c'è il fattore $4x^2$ che è il quadrato del monomio esterno alla radice $2x$.

Esempio 3

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) \;=\; (+\infty-\infty=?)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) \;=\; \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \;=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \;=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \;=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Per riconoscere il procedimento da utilizzare si osservi che nella radice c'è il fattore x^2 che è il quadrato del monomio esterno alla radice x.

Esempio 1

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{9x^2+3}} \quad = \quad \left(\frac{5}{+\infty - \infty} = ? \right)$$

Occorre raccogliere la variabile di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x^2}\right)}} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - x\cdot\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}} \quad =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x\cdot\left(2 - \sqrt{9+\frac{3}{x^2}}\right)} \quad = \quad 0 \; .$$

perchè $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ *quindi il denominatore tende a* $(+\infty)\cdot(-1) = -\infty$ *si conclude che la frazione tende a* 0.

Esempio 2

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{4\,x^2+3}} \quad = \quad \left(\frac{5}{+\infty - \infty} = ? \right)$$

L'esercizio è quasi uguale al precedente, ma se procediamo come prima, otteniamo la forma indeterminata $+\infty\cdot 0$.

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \quad =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x\cdot\left(2 - \sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)} \quad = \quad \left(\frac{5}{+\infty\cdot 0} = ? \right)$$

perchè $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ *quindi il denominatore tende a* $+\infty\cdot 0 = ?$

Occorre pertanto, procedere con l'altro metodo, cioè quello della razionalizzazione.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{4\,x^2+3}} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{2x - \sqrt{4\,x^2+3}} \cdot \frac{2x + \sqrt{4\,x^2+3}}{2x + \sqrt{4\,x^2+3}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5\cdot\left(2x + \sqrt{4\,x^2+3}\right)}{(2x)^2 - \left(\sqrt{4\,x^2+3}\right)^2} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5\cdot\left(2x + \sqrt{4\,x^2+3}\right)}{4x^2 - (4\,x^2+3)} \quad =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{5\cdot\left(2x + \sqrt{4\,x^2+3}\right)}{-3} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} -\frac{5}{3}\cdot\left(2x + \sqrt{4\,x^2+3}\right) \quad = \quad -\infty \; .$$

Per riconoscere il procedimento da utilizzare si osservi che nella radice c'è il fattore $4x^2$ che è il quadrato del monomio esterno alla radice $2x$.