Integrali Definiti

Sia $F(x)$ una primitiva qualunque della funzione $f(x)$, l'integrale definito tra i valori a e b della funzione $f(x)$ è data dalla differenza dei valori assunti da $F(x)$, rispettivamente, nell'estremo superiore b e nell'estremo inferiore a dell'integrale stesso.

In simboli: $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b)-F(a)}$

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x^2-1}{x}\, dx \;=\; \int_1^3 \left(\frac{2x^2}{x}-\frac{1}{x}\right) dx \;=\; \int_1^3 \left(2x-\frac{1}{x}\right) dx \;=\; \left[x^2-\log|x|\right]_1^3 \;=$
$\;= \; 3^2-\log 3-\left(1^2-\log 1\right) \;=\; 8-\log 3$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{2-x}\, dx \;=\; \int_{-1}^1 \left(-x^2-2x-4+\frac{8}{2-x}\right) dx \;=\; \left[-\frac{x^3}{3}-x^2-4x-8\log|2-x|\right]_{-1}^1 \;=$
$\displaystyle= \; -\frac{1}{3}-1-4-8\log 1-\left(\frac{1}{3}-1+4-8\log 3\right) \;=\; -\frac{26}{3}+8\log 3$.

3. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right) dx \;=\; \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right) dx \;=\; \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_1^4 \;=$
$\displaystyle= \; \frac{2}{3}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{5}{3}}-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right) \;=\; \frac{2}{3}\cdot 8+\frac{3}{5}\cdot 2^{\frac{10}{3}}-\frac{2}{3}-\frac{3}{5} \;=\; \frac{16}{3}-\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot 8\sqrt[3]{2} \;=$
$\displaystyle= \; \frac{80-10-9}{15}+\frac{24}{5}\sqrt[3]{2} \;=\; \frac{61}{15}+\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}$.

4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ 2x\ dx \;=\; \frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cdot sen\ 2x\ dx \;=\; \frac{1}{2}\left[-\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \;=\; -\frac{1}{2}\cdot\left(\cos 2\pi-\cos-\frac{\pi}{2}\right) \;=$
$\displaystyle= \; -\frac{1}{2}\cdot(1+1) \;=\; -1$.

5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x \cdot (1+\log x)}\, dx$ = (vedi esercizio n° 11) = $\left[\log \left|\frac{\log x}{1+\log x}\right|\right]_e^{e^2}$ =

$\log \left|\frac{\log e^2}{1+\log e^2}\right| - \log \left|\frac{\log e}{1+\log e}\right| = \log \frac{2}{1+2} - \log \frac{1}{1+1} = \log \frac{2}{3} - \log \frac{1}{2} = \log \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$

$= \log \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \log \frac{4}{3}$.