Esercizio x9 – Funzione derivabile

Verificare che la funzione $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-4}}$ non è derivabile in $x_0=-\frac{3}{2}$.

<u>Dimostrazione 1</u>

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-4}}$ *è* $Dom\ f=R-\{4\}$.

In tale Dominio la funzione è continua.

La derivata prima $f'(x)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^2}}\cdot\frac{2\cdot(x-4)-(2x+3)\cdot 1}{(x-4)^2}=$

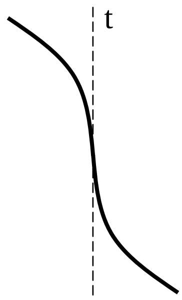
$$=\frac{2x-8-2x-3}{3\cdot(x-4)^2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^2}}=\frac{-11}{3\cdot(x-4)^2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^2}}=-\frac{11}{3\cdot(x-4)^2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{2x+3}\right)^2}.$$

La derivata prima non è definita in $x_0=-\frac{3}{2}\in Dom\ f$.

Inoltre:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f'(x)=\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}-\underbrace{\boxed{\frac{11}{3\cdot(x-4)^2}}}_{-\frac{4}{33}}\cdot\underbrace{\boxed{\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{\underbrace{2x+3}_{0^+}}\right)^2}}}_{+\infty}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f'(x)=\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}-\underbrace{\boxed{\frac{11}{3\cdot(x-4)^2}}}_{-\frac{4}{33}}\cdot\underbrace{\boxed{\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{\underbrace{2x+3}_{0^-}}\right)^2}}}_{+\infty}=-\infty.$$



Ciò vuol dire che la curva ha in $x_0=-\frac{3}{2}$ *un flesso a tangente verticale discendente.*

<u>Dimostrazione 2</u>

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(-\frac{3}{2}+h\right)-f\left(-\frac{3}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}+h\right)+3}{-\frac{3}{2}+h-4}}-\sqrt[3]{\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3}{-\frac{3}{2}-4}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{-3+2h+3}{-\frac{11}{2}+h}}-\sqrt[3]{\frac{-3+3}{-\frac{3}{2}-4}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{2h}{-\frac{11}{2}+h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{2h}{-\frac{11}{2}+h}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{h^3}{h^3}\cdot\frac{2h}{-\frac{11}{2}+h}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{h^3}\cdot\frac{2h}{-\frac{11}{2}+h}}}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h^3}\cdot\frac{2h}{-\frac{11}{2}+h}} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{2}{h^2\cdot\left(-\frac{11}{2}+h\right)}} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{2}{\underbrace{h^2}_{0^+}\cdot\underbrace{\left(-\frac{11}{2}+h\right)}_{-\frac{11}{2}}}} = -\infty \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{2}{\underbrace{h^2}_{0^+}\cdot\underbrace{\left(-\frac{11}{2}+h\right)}_{-\frac{11}{2}}}} = -\infty \end{cases}$$

Ciò vuol dire che la curva ha in $x_0 = -\frac{3}{2}$ *un flesso a tangente verticale discendente.*