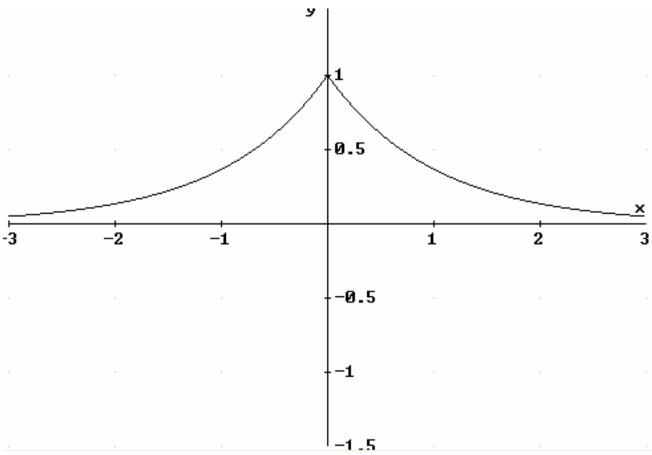
Esercizio x7 – Funzione derivabile

Verificare che la funzione $f(x)=e^{-|x|}$ non è derivabile in $x_0=0$.

Dimostrazione 1

Il dominio di $f(x)=e^{-|x|}$ *è* $Dom\ f=R$. *In tale Dominio la funzione è continua.*

$$f(x)=e^{-|x|} = \begin{cases} e^{+(-x)} & se\ \ x\geq 0 \\ e^{-(-x)} & se\ \ x<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & se\ \ x\geq 0 \\ e^{x} & se\ \ x<0 \end{cases}$$



Inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} D\left[e^{-x}\right] = \lim_{x\to 0^+} -e^{-x} = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} D\left[e^{x}\right] = \lim_{x\to 0^-} e^{x} = +1.$$

Essendo $f'_+(0) = -1$ *e* $f'_-(0)=+1$,

la funzione $f(x)=e^{-|x|}$ *non è derivabile in* $x_0=0$.

In tale punto si ha un ***punto angoloso****.*

Dimostrazione 2

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-e^{0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} -\frac{e^{-h}-1}{-h} = -1 .$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{h}-e^{0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{h}-1}{h} = 1 .$$

Essendo $f'_+(0) = -1$ *e* $f'_-(0)=1$, *la funzione* $f(x)=e^{-|x|}$ *non è derivabile in* $x_0=0$.

In tale punto si ha un ***punto angoloso****.*