Esercizio x3 – Funzione derivabile

Sia $f: R \to R$ la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{ax} + b & se \quad x \le 0 \\ ax^2 + bx & se \quad x > 0 \end{cases}$

dove a e b sono parametri reali.

1. Per quali valori di a e di b la funzione è continua ?
2. Per quali valori di a e di b la funzione è derivabile ?

Soluzione 1

La funzione $y = a \cdot e^{ax} + b$*, essendo formata da funzioni continue, è continua nell'intervallo* $]-\infty, 0[$.

La funzione $y = ax^2 + bx$*, essendo una parabola, è continua nell'intervallo* $]0, +\infty[$.

Affinché la funzione $f(x)$ *sia continua anche in* $x = 0$ *deve risultare che:*

$$\lim_{x \to 0^-} \left(a \cdot e^{ax} + b\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(ax^2 + bx\right).$$

Essendo $\lim_{x \to 0^-} \left(a \cdot e^{ax} + b\right) = a + b$ *e* $\lim_{x \to 0^+} \left(ax^2 + bx\right) = 0$ $\Rightarrow$ $a + b = 0$, *cioè* $b = -a$.

Si conclude che la funzione $f(x)$ *è continua in tutto il suo Dominio per* $b = -a$.

Soluzione 2

La funzione $y = a \cdot e^{ax} + b$*, essendo formata da funzioni derivabili, è derivabile nell'intervallo* $]-\infty, 0[$.

La funzione $y = ax^2 + bx$*, essendo una parabola, è derivabile nell'intervallo* $]0, +\infty[$.

Affinché la funzione $f(x)$ *sia derivabile anche in* $x = 0$*, deve essere innanzitutto continua in tale punto.*
Avendo dimostrato che la funzione è continua in $x = 0$ *per* $b = -a$*, verifichiamo se per tale valore la funzione è anche derivabile.*

Per $b = -a$ *la funzione vale:* $f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{ax} - a & se \quad x \le 0 \\ ax^2 - ax & se \quad x > 0 \end{cases}$

La funzione $y = a \cdot e^{ax} - a$*, essendo formata da funzioni derivabili, è derivabile nell'intervallo* $]-\infty, 0[$.

La funzione $y = ax^2 - ax$*, essendo una parabola, è derivabile nell'intervallo* $]0, +\infty[$.

Affinché la funzione $f(x)$ *sia derivabile anche in* $x = 0$ *deve risultare:* $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} D\left(a \cdot e^{ax} - a\right) = \lim_{x \to 0^-} a^2 \cdot e^{ax} = a^2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} D\left(ax^2 - ax\right) = \lim_{x \to 0^+} (2ax - a) = -a.$$

Imponendo l'uguaglianza dei due limiti, si ha: $a^2 = -a$, $a^2 + a = 0$; $a \cdot (a+1) = 0$; $\left\langle \begin{matrix} a = 0 \\ a + 1 = 0 \end{matrix} \right.$ $\begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$

Pertanto si conclude che la funzione $f(x)$ *è derivabile per:* $a = 0$ *e* $b = 0$ *oppure per* $a = -1$ *e* $b = +1$.

La prima coppia di valori da origine alla funzione costante $f(x) = 0$

La seconda coppia di valori da origine alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 1 & se \quad x \le 0 \\ -x^2 + x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Rappresentando graficamente la funzione così definita si osserva quanto dimostrato.