Esercizio x2 – Funzione derivabile

Sia $f : R \to R$ la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} 5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx & se \quad x \le 0 \\ ax + b & se \quad x > 0 \end{cases}$

dove a e b sono parametri reali.

1. Per quali valori di a e di b la funzione è continua ?
2. Per quali valori di a e di b la funzione è derivabile ?

Soluzione 1

La funzione $y = 5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx$, essendo formata da funzioni continue, è continua nell'intervallo $]-\infty, 0[$.
La funzione $y = ax + b$, essendo una retta, è continua nell'intervallo $]0, +\infty[$.
Affinché la funzione $f(x)$ sia continua anche in $x = 0$ deve risultare che:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx\right) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b).$$

Essendo $\lim_{x \to 0^-} \left(5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx\right) = 6$ *e* $\lim_{x \to 0^+} (ax + b) = b \quad \Rightarrow \quad b = 6$.

Inoltre, essendo il valore del limite $\lim_{x \to 0^-} \left(5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx\right) = 6$ *non dipendente dal parametro a, si conclude che la funzione $f(x)$ è continua in tutto il suo Dominio, $\forall a \in R$ e $b = 6$.*

Soluzione 2

La funzione $y = 5 \cdot e^{ax^2} + \cos bx$, essendo formata da funzioni derivabili, è derivabile nell'intervallo $]-\infty, 0[$
La funzione $y = ax + b$, essendo una retta, è derivabile nell'intervallo $]0, +\infty[$.
Affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile anche in $x = 0$, deve essere innanzitutto continua in tale punto.
Avendo dimostrato che la funzione è continua in $x = 0$ per $\forall a \in R$ e $b = 6$, verifichiamo se per tali valori la funzione è anche derivabile.

Per $b = 6$ la funzione vale: $f(x) = \begin{cases} 5 \cdot e^{ax^2} + \cos 6x & se \quad x \le 0 \\ ax + 6 & se \quad x > 0 \end{cases}$

Affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile anche in $x = 0$ deve risultare che: $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} D\left(5 \cdot e^{ax^2} + \cos 6x\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(10ax \cdot e^{ax^2} - 6 \cdot sen\, 6x\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} D(ax + 6) = \lim_{x \to 0^+} a = a.$$

Imponendo l'uguaglianza dei due limiti, si ha: $a = 0$.

Pertanto si conclude che per $a = 0$ e $b = 6$ la funzione è derivabile.

Essa risulta così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \cos 6x & se \quad x \le 0 \\ 6 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Rappresentando graficamente le due funzioni si osserva quanto dimostrato.