Esercizio x10 – Funzione derivabile

Verificare che la funzione $f(x)=|x-2|\cdot\sqrt{3+2x}$ non è derivabile in $x_0=2$.

Dimostrazione

Il dominio della funzione $f(x)=|x-2|\cdot\sqrt{3+2x}$ *è* $Dom\ f=\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

In tale Dominio la funzione è continua.

$$f(x)=|x-2|\cdot\sqrt{3+2x} \quad = \quad \begin{cases} +(x-2)\cdot\sqrt{3+2x} & se\ \ x\ge 2 \\ -(x-2)\cdot\sqrt{3+2x} & se\ \ -\frac{3}{2}\le x<2 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} (x-2)\cdot\sqrt{3+2x} & se\ \ x\ge 2 \\ (2-x)\cdot\sqrt{3+2x} & se\ \ -\frac{3}{2}\le x<2 \end{cases}$$

Se $x\ge 2$

$$f'(x) \;=\; 1\cdot\sqrt{3+2x}+(x-2)\cdot\frac{2}{2\cdot\sqrt{3+2x}} \;=\; \sqrt{3+2x}+\frac{x-2}{\sqrt{3+2x}} \;=\; \frac{3+2x+x-2}{\sqrt{3+2x}} \;=\; \frac{3x+1}{\sqrt{3+2x}}.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) \;=\; \lim_{x\to 2^+}\frac{3x+1}{\sqrt{3+2x}} \;=\; \frac{7}{\sqrt{7}} \;=\; \sqrt{7}.$$

Se $-\frac{3}{2}\le x<2$

$$f'(x) \;=\; -1\cdot\sqrt{3+2x}+(2-x)\cdot\frac{2}{2\cdot\sqrt{3+2x}} \;=\; -\sqrt{3+2x}+\frac{2-x}{\sqrt{3+2x}} \;=\; \frac{-3-2x+2-x}{\sqrt{3+2x}} \;=\; -\frac{3x+1}{\sqrt{3+2x}}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) \;=\; \lim_{x\to 2^-} -\frac{3x+1}{\sqrt{3+2x}} \;=\; -\frac{7}{\sqrt{7}} \;=\; -\sqrt{7}.$$

Essendo $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\sqrt{7}$ *e* $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=-\sqrt{7}$ *vuol dire che la curva ha in* $x_0=2$ *un* ***punto angoloso***.

Infine, anche se non richiesto dalla traccia, la curva non è derivabile neanche in $x=-\frac{3}{2}$*, perché in esso non è definita la funzione derivata.*

Inoltre

$$\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f'(x) \;=\; \lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} -\frac{\overbrace{3x+1}^{-\frac{7}{2}}}{\underbrace{\sqrt{3+2x}}_{0^+}} \;=\; +\infty$$