Esercizio x1 – Funzione derivabile

Sia $f : R \to R$ la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 1 & \text{se} \quad x \le 1 \\ 1 + \dfrac{x}{a} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

dove a è un parametro reale diverso da zero.

1. Per quali valori di a la funzione è continua ?
2. Per quali valori di a la funzione è derivabile ?

<u>Soluzione 1</u>

La funzione $y = 5x^2 - 1$, *essendo una parabola, nell'intervallo* $]-\infty, 1[$ *è continua.*

La funzione $y = 1 + \dfrac{x}{a}$, *essendo una retta, nell'intervallo* $]1, +\infty[$ *è continua.*

Affinché la funzione $f(x)$ *sia continua anche in* $x = 1$ *deve risultare che:* $\lim_{x \to 1^-} (5x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^+} \left(1 + \dfrac{x}{a}\right)$.

Essendo $\lim_{x \to 1^-} (5x^2 - 1) = 4$ *e* $\lim_{x \to 1^+} \left(1 + \dfrac{x}{a}\right) = 1 + \dfrac{1}{a}$,

imponendo l'uguaglianza fra questi due valori, si ha: $1 + \dfrac{1}{a} = 4$; $\dfrac{1}{a} = 3$; $a = \dfrac{1}{3}$.

In definitiva la funzione $f(x)$ *è continua in tutto il suo Dominio per* $a = \dfrac{1}{3}$.

<u>*Soluzione 2*</u>

La funzione $y = 5x^2 - 1$, *essendo una parabola, nell'intervallo* $]-\infty, 1[$ *è derivabile.*

La funzione $y = 1 + \dfrac{x}{a}$, *essendo una retta, nell'intervallo* $]1, +\infty[$ *è derivabile.*

Affinché la funzione $f(x)$ *sia derivabile anche in* $x = 1$, *essa deve essere innanzitutto continua in tale punto. Avendo dimostrato che la funzione è continua in* $x = 1$ *per* $a = \dfrac{1}{3}$, *verifichiamo se per tale valore la funzione è anche derivabile.*

Per $a = \dfrac{1}{3}$ *la funzione vale:* $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 1 & \text{se} \quad x \le 1 \\ 1 + 3x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

Affinché la funzione $f(x)$ *sia derivabile anche in* $x = 1$ *deve risultare che:* $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} D(5x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^-} 10x = 10$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} D(1 + 3x) = \lim_{x \to 1^+} 3 = 3 .$$

Essendo tali limiti fra loro diversi, la funzione $f(x)$ *non è derivabile in* $x = 1$.

Rappresentando graficamente le due funzioni si osserva quanto dimostrato.