LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

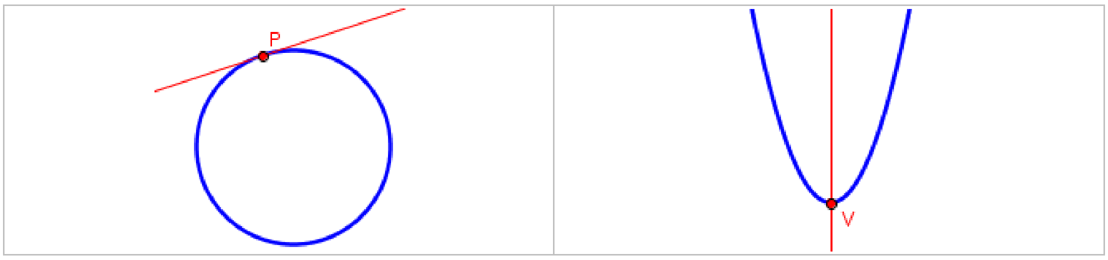
Teoria

Il problema della tangente

Uno dei problemi classici che portano al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente a una curva in un punto.

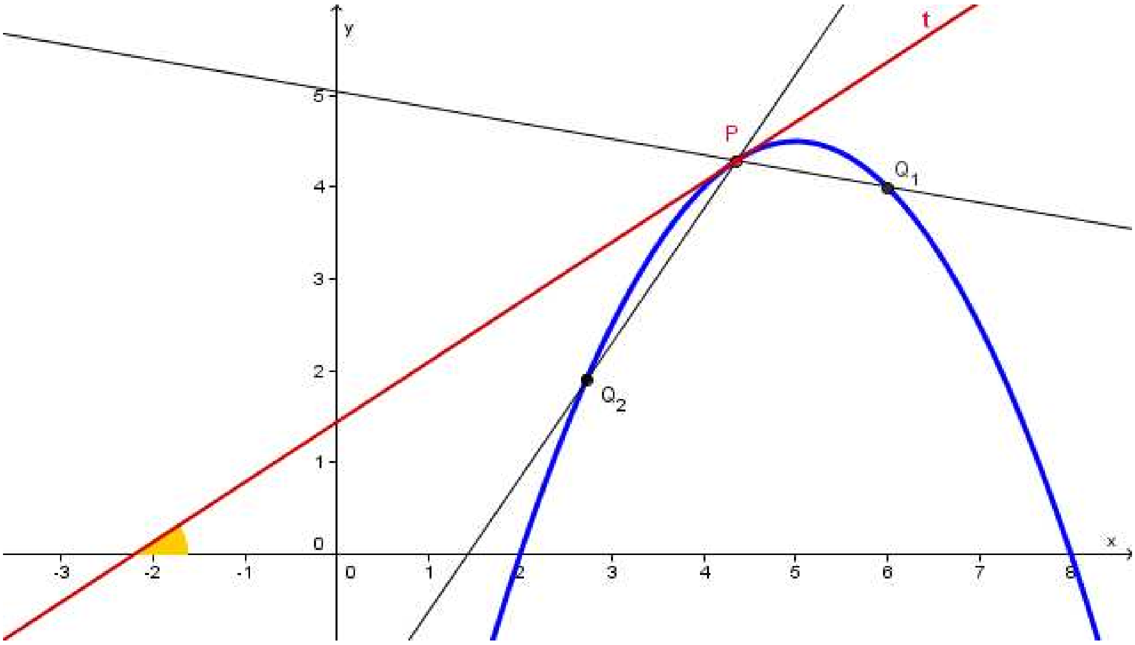
La tangente ad una circonferenza è quella retta che interseca la circonferenza in un solo punto P.

Questa definizione però non va bene per tutte le curve. Ci sono anche rette che intersecano una curva in un solo punto, ma non sono tangenti alla curva (per esempio, l'asse della parabola la interseca solo nel vertice, ma non è tangente).

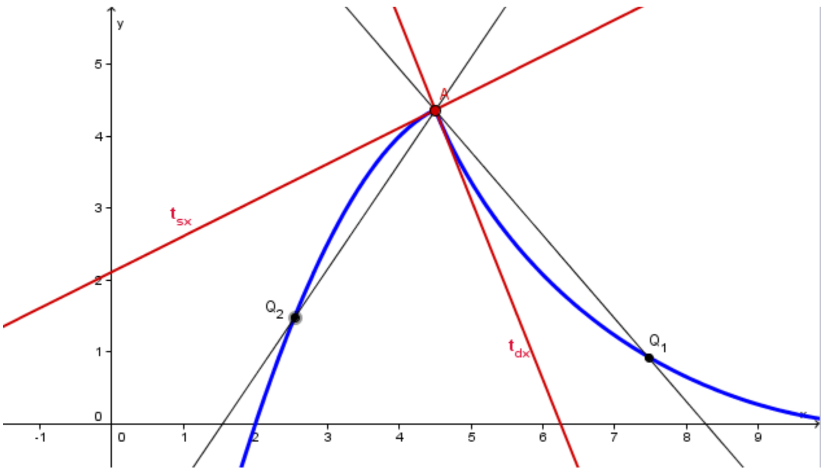


La definizione corretta di retta tangente, valida per tutti i tipi di curve è la seguente:

La retta tangente $\boldsymbol{t}$ a una curva in un punto $\boldsymbol{P}$ è la posizione limite, se esiste, della retta secante $\boldsymbol{PQ}$ al tendere (sia da destra sia da sinistra) di $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{P}$.



Tale retta limite non sempre esiste. Si veda il grafico sottostante.



Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$ definita in certo dominio $[a\ ,\ b]$, per trovare la retta tangente alla curva in un suo punto $P\ (x_0\ , y_0)$, consideriamo un altro punto $Q\ \left(x_0 + h\ ,\ \ f(x_0 + h)\right)$) della curva.

Tracciamo la retta secante il grafico PQ e la retta tangente al grafico nel punto P.

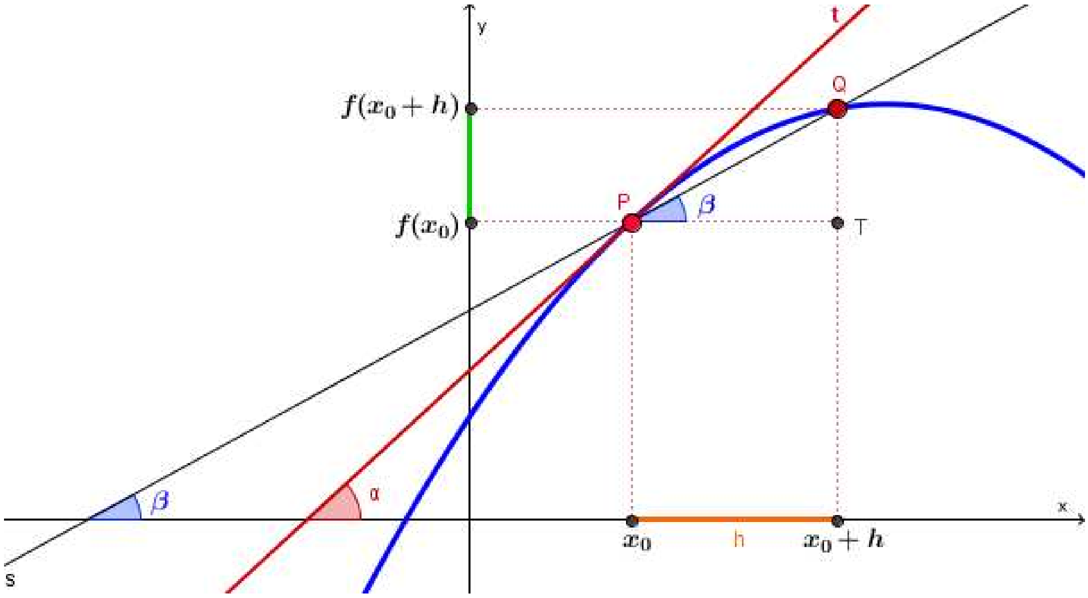
Nel triangolo rettangolo PQT la tangente dell'angolo acuto β è uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo β e il cateto adiacente, cioè:

$$tg\ \beta = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale espressione è detta **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 .

$\Delta y\ =\ f(x_0 + h) - f(x_0)$ è detto **incremento** della variabile dipendente y .

$\Delta x\ =\ (x_0 + h) - x_0\ \ =\ h$ è detto **incremento** della variabile indipendente x .



Attribuendo a h valori sempre piu piccoli, ($h \longrightarrow 0$), il punto Q si avvicina sempre di piu al punto P.

La retta secante PQ tende a diventare la retta tangente alla curva in P.

Il coefficiente angolare della retta secante PQ, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente alla curva in P.

Definizione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a\ , b]$, si chiama **derivata della funzione** nel punto $x_0 \in (a\ , b)$ e si indica con $f'(x_0)$, il limite, se esiste ed è finito, per $h \longrightarrow 0$, del rapporto incrementale di $f(x)$ relativo a x_0.

In simboli: $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è da considerarsi sia per $h > 0$, sia per $h < 0$.

Una funzione $y = f(x)$ si dice **derivabile** in un punto x_0 se esiste finita la derivata $f'(x_0)$. In particolare:

- la funzione $f(x)$ è definita in un intorno del punto x_0 ;
- esiste finito il limite del rapporto incrementale di $f(x)$ relativo a x_0 $\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Se il limite del rapporto incrementale non esiste o è infinito, si dice che la funzione **non è derivabile** in quel punto.

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in ciascun punto $x \in (a\ , b)$ si dice che essa è derivabile nell'intervallo $(a\ , b)$.

I simboli utilizzati per indicare la derivata di una funzione sono: $\quad f'(x) \qquad y' \qquad D\ f(x) \qquad \frac{dy}{dx}$.

La derivata sinistra e la derivata destra

Poiché la derivata di una funzione è un limite (il limite del rapporto incrementale), ha senso definire la derivata sinistra e la derivata destra di una funzione.

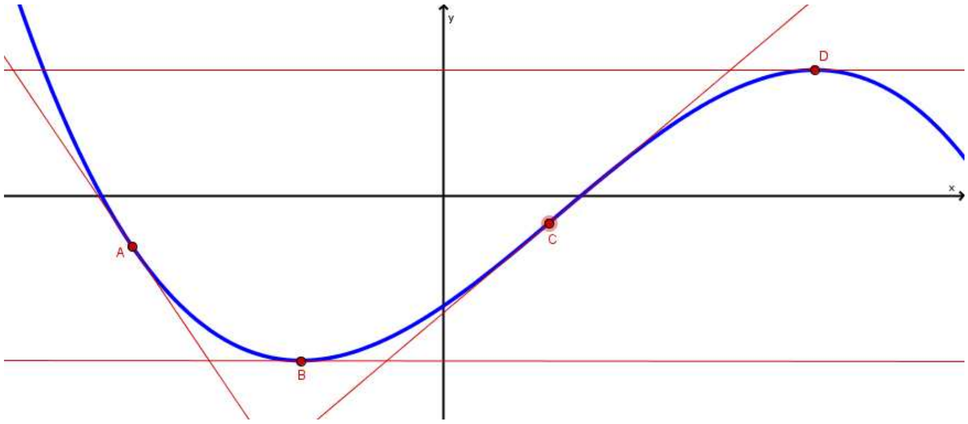
Definizione

La derivata destra di una funzione in un punto x_0 è:	$f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
La derivata sinistra di una funzione in un punto x_0 è:	$f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Significato geometrico della derivata

La derivata di una funzione in un punto x_0 rappresenta il **coefficiente angolare della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa x_0. In simboli: $f'(x_0) = m_{t_{x_0}}$.

La retta tangente ***t*** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa x_0 ha equazione: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ dove $m = f'(x_0)$.



La funzione derivata $f'(x)$, al variare di x, fornisce il coefficiente angolare di tutte le rette tangenti alla funzione $f(x)$

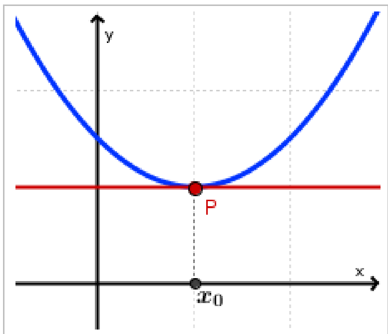
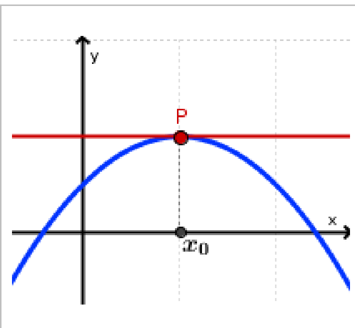
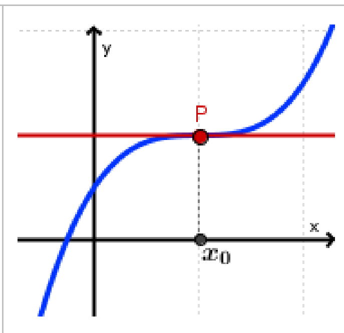
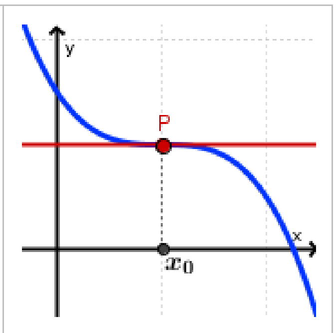
Punti stazionari

I punti stazionari sono quei punti in cui la tangente al grafico della funzione è parallela all'asse x.

Questo si verifica quando l'equazione della tangente è del tipo $y = 0x + q$, ossia quando il coefficiente angolare della retta tangente è zero. Ricordando che $f'(x_0) = m_{t_{x_0}}$ si ha la seguente definizione.

Definizione

Un punto $x = x_0$ di una funzione $f(x)$ è detto **punto stazionario** o punto a tangente orizzontale se $f'(x_0) = 0$.

			
x_0 punto di MIN RELATIVO	x_0 punto di MAX RELATIVO	x_0 punto di FLESSO	x_0 punto di FLESSO

Punti di non derivabilità

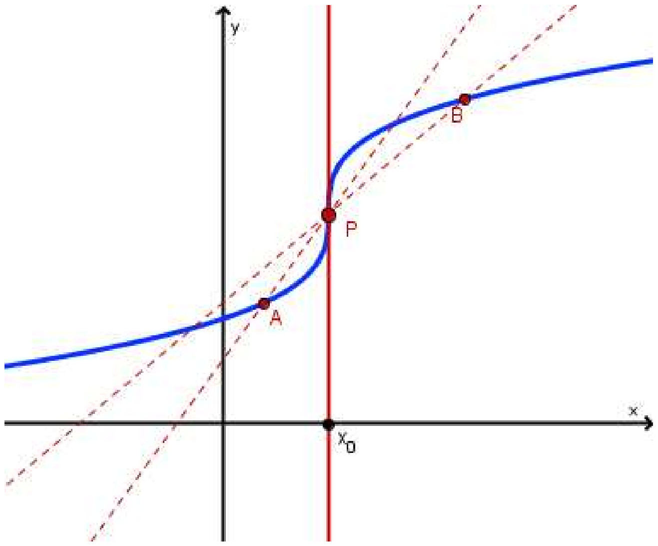
I punti di non derivabilità sono quei punti in cui il limite del rapporto incrementale non esiste o è infinito.

Esaminiamo i diversi tipi di non derivabilità.

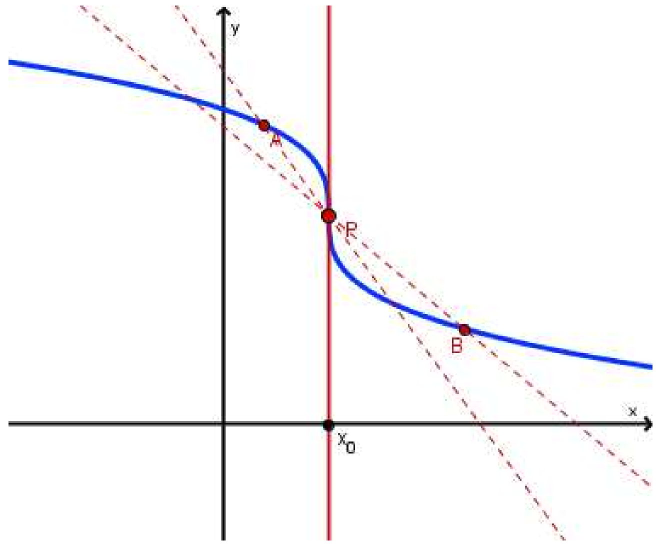
Flessi a tangente verticale

Le rette secanti passanti per il punto P tendono alla retta verticale $x = x_0$, man mano che gli ulteriori punti di intersezione si avvicinano a P. Tutte queste rette secanti hanno coefficiente angolare sempre dello stesso segno.

La funzione $f(x)$ ha nel punto di ascissa x_0 un flesso a tangente verticale se:	$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$ OPPURE $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$



$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$

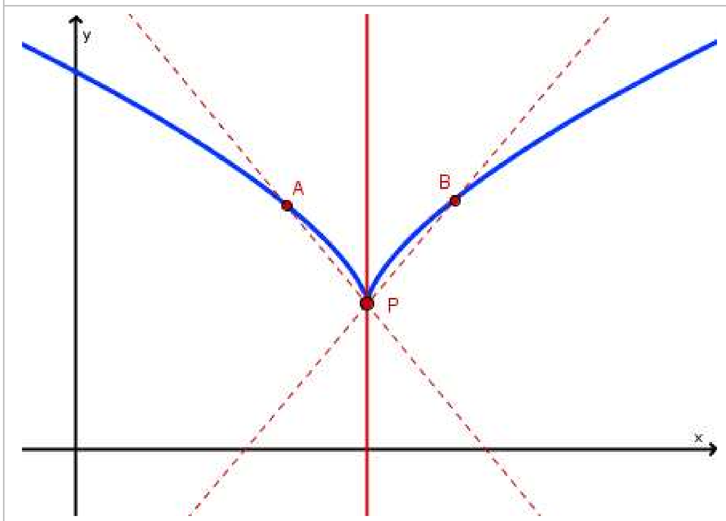


$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$

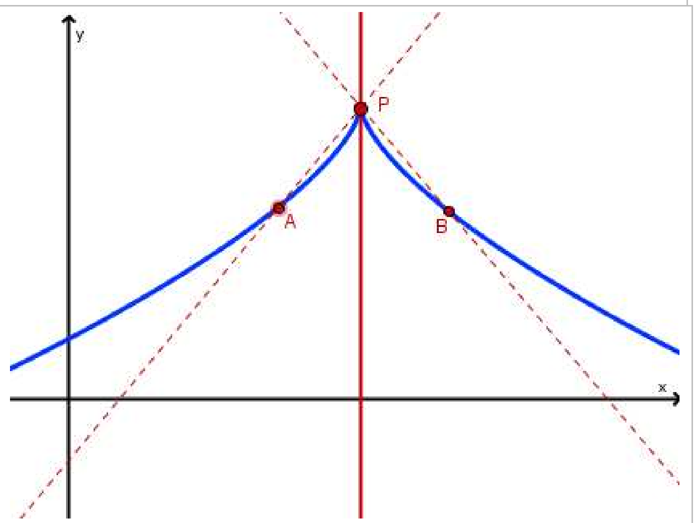
Cuspidi

Le rette secanti passanti per il punto P tendono alla retta verticale $x = x_0$, man mano che gli ulteriori punti di intersezione (punto variabile A) si avvicinano a P. Tutte le rette secanti passanti per il punto A, a sinistra di P, hanno il coefficiente angolare dello stesso segno; mentre tutte le rette secanti passanti per il punto B, a destra di P, hanno il coefficiente angolare dello stesso segno ma opposto a quello delle rette secanti passanti per A.

La funzione $f(x)$ ha nel punto di ascissa x_0 una cuspide se:	$f'_-(x_0) = +\infty \quad \land \quad f'_+(x_0) = -\infty$ OPPURE $f'_-(x_0) = -\infty \quad \land \quad f'_+(x_0) = +\infty$



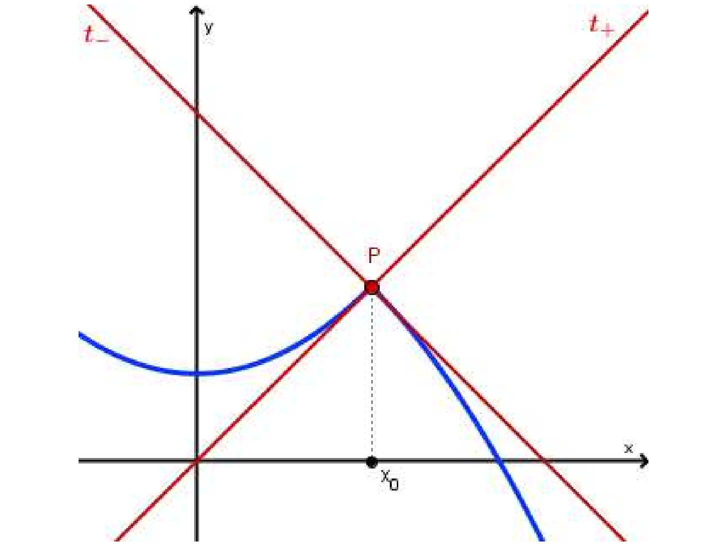
$\boldsymbol{f'_-(x_0) = -\infty \quad \land \quad f'_+(x_0) = +\infty}$



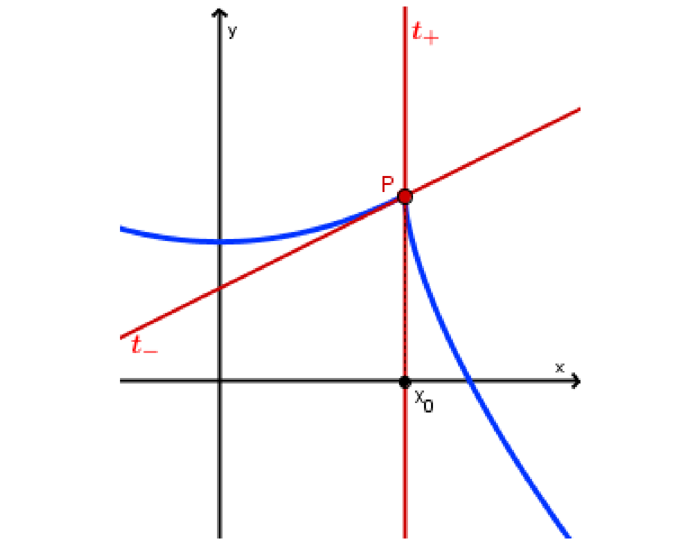
$f'_-(x_0) = +\infty \quad \land \quad f'_+(x_0) = -\infty$

Punti angolosi

La funzione $f(x)$ ha nel punto di ascissa x_0 un punto angoloso se:	$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ entrambe finite OPPURE $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ una finita e l'altra infinita



$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ entrambe finite



$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ una finita e l'altra infinita

La continuità e la derivabilità di una funzione

Teorema

Se $f(x)$ è derivabile nel punto x_0	$\Rightarrow$	$f(x)$ è continua nel punto x_0

Dimostrazione

Dalla identità: $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si ricava:

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h \ ;$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$$

Calcoliamo il limite di entrambi i membri:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left[f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right] \qquad (1)$$

Per ipotesi $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 , quindi il limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Pertanto il limite del II membro è: $\lim_{h\to 0}\left[f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right] = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)$

Sostituendo nell'espressione (1) si ha: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Tale espressione equivale a dire che la funzione la $f(x)$ è continua nel punto x_0 .

Infatti se poniamo $x_0 + h$ si ha: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Non vale il teorema inverso.

Le derivate fondamentali

Dimostriamo le formule di derivazione delle funzioni più importanti. Queste formule permettono di calcolare le derivate delle funzioni senza dover calcolare il limite del rapport incrementale.

Teorema

La derivata della funzione costante $f(x) = k$ è zero

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 .$$

Questo risultato può essere ottenuto anche graficamente. Infatti la funzione $y = k$ rappresenta una retta orizzontale e pertanto la retta tangente ad essa è la retta stessa, la quale essendo orizzontale ha coefficiente angolare zero.

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 .$$

Questo risultato può essere ottenuto anche graficamente. Infatti la funzione $y = x$ rappresenta la bisettrice del primo e terzo quadrante. Pertanto la retta tangente ad essa è la retta stessa, la quale ha coefficiente angolare 1 .

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = x^2$ è $f'(x) = 2x$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2hx - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2hx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h + 2x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x .$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = x^3$ è $f'(x) = 3x^2$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3hx^2 + 3h^2x - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3hx^2 + 3h^2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h^2 + 3x^2 + 3hx)}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2 + 3x^2 + 3hx) = 3x^2 .$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = x^n$ è $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

con $n \in N - \{0\}$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + a_1x^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \ldots + a_{n-2}x^2h^{n-1} + a_{n-1}x\,h^n) - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a_1x^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \ldots + a_{n-2}x^2h^{n-1} + a_{n-1}x\,h^{n-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\,h + \ldots + a_{n-2}x^2h^{n-2} + a_{n-1}x\,h^{n-1})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\,h + \ldots + a_{n-2}x^2h^{n-2} + a_{n-1}x\,h^{n-1}) = a_1 \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} .$$

Perchè nello sviluppo della Potenza di un binomio $a_1 = \binom{n}{1} = n$

Mentre $a_2 = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ $\quad a_3 = \binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ $\quad . \; . \; . \; a_k = \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\,\cdots\,(n-k+1)}{k!}$

Teorema

La derivata della funzione $\boldsymbol{f(x) = x^{\alpha}}$ **è** $\boldsymbol{f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}}$

con $\alpha \in R$ e $x > 0$

Caso particolare

La derivata della funzione $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[2]{x}}$ **è** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$f(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\, x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Teorema

La derivata della funzione $\boldsymbol{f(x) = \ln x}$ **è** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x}}$ $\quad \boldsymbol{\forall x \in R}$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_e \frac{x+h}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_e \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \left(\log_e \frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad \text{ponendo} \quad \frac{h}{x} = \frac{1}{t} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{x}{t}$$

$$\Longrightarrow \quad = \lim_{t\to\infty} \log_e \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \lim_{t\to\infty} \log_e \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}} = \log_e e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Teorema

La derivata della funzione $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ **è** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$ $\quad \boldsymbol{\forall x \in R}$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$\text{Essendo} \quad \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} \quad \Rightarrow \quad D \log_e x = D \frac{1}{\log_e a} \cdot \log_e x = \frac{1}{\log_e a} \cdot D \log_e x = \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = e^x$ è $f'(x) = e^x$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = a^x$ è $f'^{(x)} = a^x \cdot \ln a$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \ln x$$

$$perchè \quad \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln x$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = \sin x$ è $f'(x) = \cos x$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \cdot \text{sen}\, h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\text{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\text{sen}\, h}{h} \right] = \cos x \text{ poiché } \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, h}{h} = 1$$

$$\text{e} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h \cdot (\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\text{sen}^2 h}{h \cdot (\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} -\frac{\text{sen}\, h}{h} \cdot \frac{\text{sen}\, h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = \cos x$ è $f'(x) = -\sin x$

Dimostrazione

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1) - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen}\, x \frac{\text{sen}\, h}{h} \right] = -\text{sen}\, x$$

Teorema

La derivata della funzione $f(x) = \tan x$ è $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Dimostrazione

$$D\, \text{tg}\, x = D \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\text{sen}\, x) \cdot \text{sen}\, x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos^2 x}}$$

Derivata della somma

$$D\left[f(x)+g(x)\right]=f'(x)+g'(x)$$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$D[f(x)+g(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Derivata del prodotto

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$D[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-[f(x)\cdot g(x)]}{h}=$$ *aggiungendo e sottraendo* $f(x+h)\cdot g(x)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]+g(x)\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$$

Derivata del prodotto di una costante per una funzione

$$D\left[k\cdot g(x)\right]=k\cdot f'(x)$$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$D[k\cdot f(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\cdot f'(x)$$

Derivata del quoziente

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$D\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h}=$$ *aggiungendo e sottraendo* $f(x)\cdot g(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)+f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left[g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\left[g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)\right]=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Derivata del reciproco di una funzione

$$D\,\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

<u>*Dimostrazione*</u>

Applicando la derivata del quoziente di due funzioni si ha: $D\,\frac{1}{f(x)} = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

Derivata della funzione composta

$$D\,g\left[f(x)\right] = g'\left[f(x)\right] \cdot f'(x)$$

Esempio $D\ \ln sen\,x = \frac{1}{sen\,x} \cdot \cos x = cotg\,x\,.$

Derivata della funzione inversa

$$D\ f(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad \text{DOVE} \quad g(y) = f^{-1}(y)$$

Esempio

SIA $y = arcsen\,x$. LA FUNZIONE INVERSA È $x = sen\,y$ DEFINITA IN $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$D\ arcsen\,x = \frac{1}{D\ sen\,y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

TABELLA DELLE PRINCIPALI REGOLE DI DERIVAZIONE

$D\, f(x)$	$D\, g\,[f\,(x)] = g^{I}\,[f(x)] \cdot f^{I}\,(x)$
D COSTANTE = 0	
$D\, x^{n} = n\, x^{n-1}$	$D\,[f\,(x)]^{n} = n\,[f\,(x)]^{n-1} \bullet f^{I}(x)$
$D\, \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$	$D\, \frac{1}{f(x)} = -\frac{f^{I}(x)}{[f(x)]^2}$
$D\, \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\, \sqrt[n]{f(x)} = \frac{f^{I}(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$D\, \sqrt[n]{x^p} = \frac{p}{n\sqrt[n]{x^{n-p}}}$	$D\, \sqrt[n]{[f(x)]^p} = \frac{p \cdot f^{I}(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-p}}}$
$D\, \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\, \sqrt{f(x)} = \frac{f^{I}(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$D\, \text{sen}\, x = \cos x$	$D\, \text{sen}\, f\,(x) = f^{I}\,(x) \bullet \cos f\,(x)$
$D\, \cos x = -\, \text{sen}\, x$	$D\, \cos f\,(x) = -\, f^{I}\,(x) \bullet \text{sen}\, f\,(x)$
$D\, \text{tg}\, x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x$	$D\, \text{tg}\, f\,(x) = \frac{f^{I}(x)}{\cos^2 f(x)}$
$D\, \text{cotg}\, x = -\frac{1}{\text{sen}^2\, x} = -(1 + \text{cotg}^2\, x)$	$D\, \text{cotg}\, f\,(x) = -\frac{f^{I}(x)}{\text{sen}^2\, f(x)}$
$D\, \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \cdot \log_e a}$	$D\, \log_a x = \frac{f^{I}(x)}{f(x) \cdot \log_e a}$
$D\, \log_e x = \frac{1}{x}$	$D\, \log_e f\,(x) = \frac{f^{I}(x)}{f(x)}$
$D\, a^{x} = a^{x} \cdot \log_e a$	$D\, a^{f\,(x)} = a^{f\,(x)} \bullet \log_e a \bullet f^{I}(x)$
$D\, e^{x} = e^{x}$	$D\, e^{f\,(x)} = f^{I}\,(x) \bullet e^{f\,(x)}$
$D\, \text{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\, \text{arcsen}\, f\,(x) = \frac{f^{I}(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$D\, \text{arccos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\, \text{arccos}\, f\,(x) = -\frac{f^{I}(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$D\, \text{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\, \text{arctg}\, f\,(x) = \frac{f^{I}(x)}{1+[f(x)]^2}$
$D\, \text{arccotg}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$	$D\, \text{arccotg}\, x = -\frac{f^{I}(x)}{1+[f(x)]^2}$
$D\, x^{x} = x^{x} \bullet (\,1 + \log_e x)$	$D\,[f\,(x)]^{g\,(x)} = [\,f\,(x)]^{g\,(x)} \cdot \left[g^{I}\,(x) \cdot \log_e f\,(x) + \frac{g\,(x)}{f\,(x)} \cdot f^{I}\,(x) \right]$