LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Esempi

Esempio 1

Calcola il rapporto incrementale della funzione $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ relativo al suo punto P di ascissa -2 e a un generico incremento h .

Soluzione

Il rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$ è:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$
$$= \frac{[3 \cdot (-2 + h)^2 - 4 \cdot (-2 + h) + 5] - [3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 5]}{h} =$$
$$= \frac{[3 \cdot (4 + h^2 - 4h) + 8 - 4h + 5] - [3 \cdot 4 + 8 + 5]}{h} =$$
$$= \frac{12 + 3h^2 - 12h + 8 - 4h + 5 - 25}{h} =$$
$$= \frac{3h^2 - 16h}{h} =$$
$$= \frac{h(3h - 16)}{h} =$$
$$= 3h - 16 \ .$$

L'espressione trovata rappresenta, al variare di h, il coefficiente angolare di una generica retta secante passante per il punto P .

Esempio 2

Calcola la derivata della funzione $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ nel suo punto P di ascissa -2 .

Soluzione

Il rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$ è:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$
$$= \frac{[3 \cdot (-2 + h)^2 - 4 \cdot (-2 + h) + 5] - [3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 5]}{h} =$$
$$= \frac{[3 \cdot (4 + h^2 - 4h) + 8 - 4h + 5] - [3 \cdot 4 + 8 + 5]}{h} =$$
$$= \frac{12 + 3h^2 - 12h + 8 - 4h + 5 - 25}{h} =$$
$$= \frac{3h^2 - 16h}{h} =$$
$$= \frac{h(3h - 16)}{h} =$$
$$= 3h - 16 \ .$$

La derivata della funzione $y = f(x)$ nel suo punto P di ascissa -2 è:

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (3h - 16) = -16 \ .$$

Esempio 3

Calcola la derivata della funzione $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ in un generico punto P di ascissa x .

Soluzione

Il rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$ è:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{[3 \cdot (x+h)^2 - 4 \cdot (x+h) + 5] -}{h} =$$

$$= \frac{[3 \cdot (x^2 + h^2 + 2hx) - 4x - 4h + 5] - [3x^2 - 4x + 5]}{h} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3h^2 + 6hx - 4x - 4h + 5 - 3x^2 + 4x - 5}{h} =$$

$$= \frac{3h^2 + 6hx - 4h}{h} =$$

$$= \frac{h(3h + 6x - 4)}{h} =$$

$$= 3h + 6x - 4 \ .$$

La derivata della funzione $y = f(x)$ è:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 4) = 6x - 4 \ .$$

Esempio 4

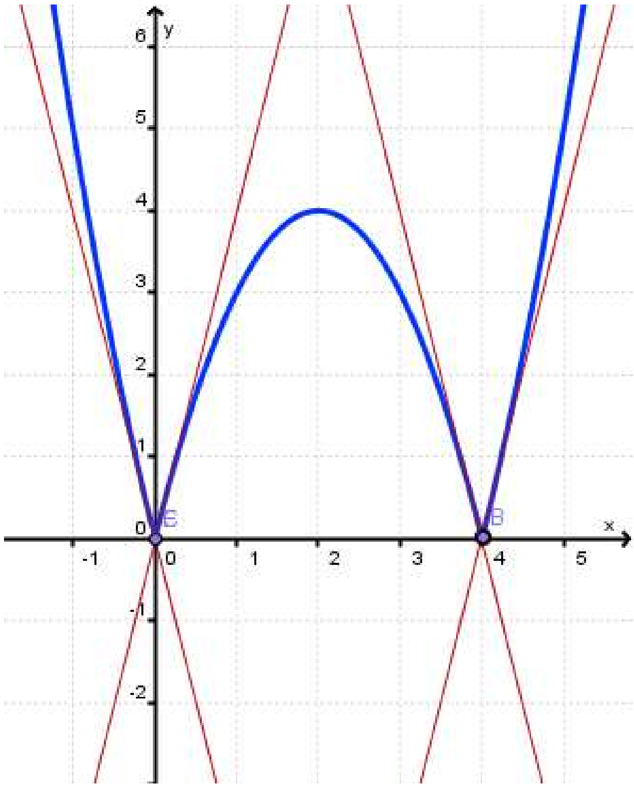
Determina la derivata destra e sinistra della funzione $y = f(x) = |x^2 - 4x|$ nel suo punto P di ascissa 4 .

Soluzione

La funzione può essere esplicitata nella forma:

$$f(x) = |x^2 - 4x| = \begin{cases} +(x^2 - 4x) & se \quad x^2 - 4x \geq 0 \\ -(x^2 - 4x) & se \quad x^2 - 4x < 0 \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad f(x) = \begin{cases} +x^2 - 4x & se \quad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & se \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

Da questa espressione si osserva che a sinistra e a destra del punto $x_0 = 4$ la funzione ha due diverse espressioni analitiche.



Pertanto calcolando le derivate, destra e sinistra, si ottiene:

$$f'_-(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(4+h)^2 + 4 \cdot (4+h) - [-4^2 + 4 \cdot 4]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-16 - h^2 - 8h + 16 + 4h - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (-h - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h - 4) = -4$$

$$f'_+(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4 \cdot (4+h) - [4^2 - 4 \cdot 4]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 16 - 4h - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h + 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 4) = +4$$

Avendo ottenuto: $f'_-(4) \neq f'_+(4) \quad \Rightarrow$ la funzione non è derivabile nel punto $x_0 = 4$.

La funzione non è derivabile nemmeno nel punto $x_0 = 0$.

Infatti:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4 \cdot h - [0^2 - 4 \cdot 0]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h - 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h - 4) = -4 \ .$$

Mentre:

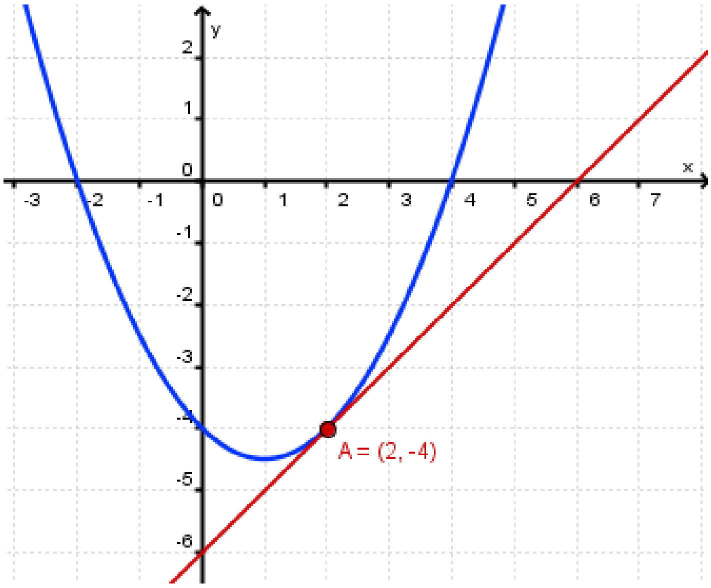
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 4 \cdot h - [-0^2 + 4 \cdot 0]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h + 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = +4 \ .$$

Avendo ottenuto: $f'_-(0) \neq f'_+(0) \quad \Rightarrow$ la funzione non è derivabile nel punto $x_0 = 0$.

Esempio 5

Determina l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ nel suo punto P di ascissa 2 .



Soluzione

La retta tangente t al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 ha equazione:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

dove $m = f'(x_0)$ e $y_0 = f(x_0)$.

$$m = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(2+h)^2 - (2+h) - 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 - 4\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(4 + h^2 + 4h) - 2 - h - 4 - (2 - 2 - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + \frac{1}{2}h^2 + 2h - 2 - h - 4 + 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}h^2 + 2h - h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \left(\frac{1}{2}h + 1\right)}{h} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}h + 1\right) = 1 .$$

Mentre $y_0 = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 - 4 = -4$.

La retta tangente richiesta ha equazione:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$;

$y - (-4) = 1 \cdot (x - 2)$;

$y + 4 = x - 2$;

$y = x - 6$.

Esempio 6

Determina l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ nel suo punto P di ascissa -2 .

Soluzione

La retta tangente t al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 ha equazione: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

dove $m = f'(x_0)$ e $y_0 = f(x_0)$.

Rifacendo i calcoli dell'esempio 3 si ottiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 4) = 6x - 4 .$$

Pertanto: $m = f'(-2) = 6 \cdot (-2) - 4 = -16$.

Mentre $y_0 = f(-2) = 3(-2)^2 - 4(-2) + 5 = 12 + 8 + 5 = 25$.

La retta tangente richiesta ha equazione:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$;

$y - 25 = -16 \cdot \left(x - (-2)\right)$;

$y - 25 = -16x - 32$;

$y = -16x - 7$;

Esempi

Calcola le derivate delle seguenti funzioni utilizzando le formule delle derivate fondamentali:

La derivata di una costante è zero.

$D\ 3 = 0$	$D\ \pi = 0$
$D\ e = 0$	$D\ \frac{3}{2} = 0$
$D\sqrt[3]{5} = 0$	$D\ \sqrt[3]{1{,}5} = 0$

La derivata $D\,x^n = n \cdot x^{n-1}$

$Dx^3 = 3x^2$	$D\frac{1}{x} = D\,x^{-1} = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$D\sqrt[2]{x} = D\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$D\frac{1}{x^5} = D\,x^{-5} = -5 \cdot x^{-5-1} = -\frac{5}{x^6}$
$D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$	$D\frac{1}{x^3} = D\,x^{-3} = -3 \cdot x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4}$
$D\sqrt[7]{x^3} = D\,x^{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} = \frac{3}{7} \cdot x^{-\frac{4}{7}} = \frac{3}{7 \cdot x^{\frac{4}{7}}} = \frac{3}{7 \cdot \sqrt[7]{x^4}}$	$D\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = D\,x^{-\frac{3}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{3}{5}-1} = -\frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{8}{5}} = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$
$Dx^{\pi} = \pi \cdot x^{\pi-1}$	$Dx^{e} = e \cdot x^{e-1}$
$Dx^{\sqrt[3]{5}+3} = \left(\sqrt[3]{5}+3\right) \cdot x^{\sqrt[3]{5}+3-1} = \left(\sqrt[3]{5}+3\right) \cdot x^{\sqrt[3]{5}+2}$	$Dx^{e+1} = (e+1) \cdot x^{e+1-1} = (e+1) \cdot x^{e}$
$D\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}} = D\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = D\,x^{\frac{2}{15}} = \frac{2}{15} \cdot x^{\frac{2}{15}-1} = \frac{2}{15} \cdot x^{-\frac{13}{15}} = \frac{2}{15 \cdot x^{\frac{13}{15}}} = \frac{2}{15 \cdot \sqrt[15]{x^{13}}}$	
$D\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}} = D\left(x^{\frac{3}{5}} : x^{\frac{4}{7}}\right) = D\left(x^{\frac{3}{5}-\frac{4}{7}}\right) = D\left(x^{\frac{21-20}{35}}\right) = D\,x^{\frac{1}{35}} = \frac{1}{35} \cdot x^{\frac{1}{35}-1} = \frac{1}{35} \cdot x^{-\frac{34}{35}} = \frac{1}{35 \cdot \sqrt[35]{x^{34}}}$	
$D\frac{x^2}{\sqrt[7]{x^4}} = D\left(x^2 : x^{\frac{4}{7}}\right) = D\left(x^{2-\frac{4}{7}}\right) = D\,x^{\frac{10}{7}} = \frac{10}{7} \cdot x^{\frac{10}{7}-1} = \frac{10}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}} = \frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}$	
$D\ x^2 \cdot \sqrt[7]{x^4} = D\ x^2 \cdot x^{\frac{4}{7}} = D\ x^{\frac{18}{7}} = \frac{18}{7} \cdot x^{\frac{18}{7}-1} = \frac{18}{7} \cdot x^{\frac{11}{7}} = \frac{18}{7}\sqrt[7]{x^{11}}$	

La derivata $D\,a^x = a^x \cdot \ln a$

$D\ 3^x = 3^x \cdot \ln 3$	$D\ 7^x = 7^x \cdot \ln 7$
$D\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{2}$	$D\ 0.5^{\,x} = 0.5^{\,x} \cdot \ln 0.5 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{2}$
$D\left(\sqrt{3}\right)^x = \left(\sqrt{3}\right)^x \cdot \ln\sqrt{3}$	$D\ \pi^x = \pi^x \cdot \ln\pi$
$D\frac{1}{7^x} = D\left(\frac{1}{7}\right)^x = \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot [\ln 1 - \ln 7] = \frac{1}{7^x} \cdot [0 - \ln 7] = -\frac{1}{7^x} \cdot \ln 7$	

La derivata $D\,\log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$D\ \log_3 x = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$	$D\ \log_7 x = \frac{1}{x \cdot \ln 7}$
$D\ \log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{1}{x \cdot \ln\sqrt[3]{5}}$	$D\ \log_{\pi} x = \frac{1}{x \cdot \ln\pi}$