Radicali

1. Radice n-esima

Definizione

Il simbolo $k\sqrt[n]{a}$ è detto **radicale**.

Il numero a è detto **radicando**. Il numero n è detto **indice del radicale**.
Il numero k è detto **coefficiente del radicale**.

Definizione

Sia n un numero naturale diverso da zero, la **radice n-esima** di un numero reale a (se esiste) è:

- il numero reale b tale che $b^n = a$ se n è dispari;
- il numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$ se n è pari;

In simboli: $\sqrt[n]{a} = \begin{cases} b & | \quad b^n = a \qquad se\ n\ è\ dispari \\ b \geq 0 & | \quad b^n = a \qquad se\ n\ è\ pari \end{cases}$

Esempi

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$ perché $(-2)^3 = -8$
3. $\sqrt[5]{7} \cong 1{,}476$ perché $(1{,}476)^5 \cong 7$
4. $\sqrt[2]{-4}$ non esiste perché $\nexists\, x \in R \mid x^2 = -4$
5. $\sqrt[2]{4} = 2$ perché $2^2 = 4$.
   Anche se esiste la soluzione -2 [infatti $(-2)^2 = 4$], si è convenuto di scegliere solo la soluzione positiva, perché in matematica ogni operazione deve dar luogo ad un unico risultato.
   Altrimenti si otterrebbe il seguente assurdo: $+2 = \sqrt[2]{4} = -2$.

Casi particolari

$\sqrt[0]{a}$ non ha significato	Esempio : $\sqrt[0]{5}$ non ha significato
$\sqrt[1]{a} = a$	Esempio : $\sqrt[1]{5} = 5$
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	Esempio : $\sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$
$\sqrt[n]{0} = 0$ con $n \neq 0$	Esempio : $\sqrt[3]{0} = 0$
$\sqrt[n]{1} = 1$ con $n \neq 0$	Esempio : $\sqrt[7]{1} = 1$
$\sqrt[dispari]{-a} = -\sqrt[dispari]{a} \quad \forall a \in R$	Esempio : $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$

Condizioni di esistenza del radicale

Il radicale $\sqrt[pari]{a}$ esiste $\forall a \geq 0$

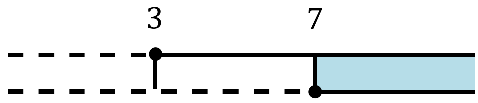
Il radicale $\sqrt[dispari]{a}$ esiste $\forall a \in R$

Esempi

1. Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[4]{x-2}$ sono $C.E.$: $x-2 \geq 0$ ossia $x \geq 2$
2. Le condizioni di esistenza del radicale $\sqrt[3]{x-2}$ sono $C.E.$: $\forall x \in R$
3. Le condizioni di esistenza dell'espressione $\sqrt[6]{x-3} - 5x \cdot \sqrt[3]{x-7}$ sono $C.E.$: $x \geq 3$.
4. Le condizioni di esistenza dell'espressione $\sqrt[6]{x-3} - 5x\sqrt[4]{x-7}$ sono $C.E.$: $x \geq 7$.

   Infatti:

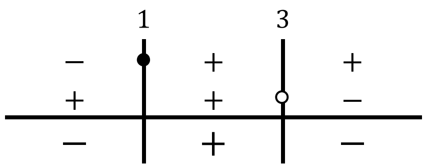
   $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 7 \end{cases}$

5. Le condizioni di esistenza del radicale: $\sqrt[6]{\frac{x-1}{3-x}}$ sono $C.E.$: $1 \leq x < 3$

   Infatti:

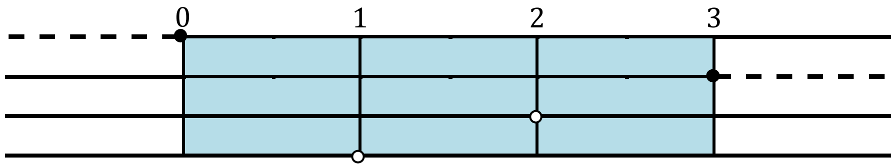
   $\frac{x-1}{3-x} \geq 0$ $\quad$ $x-1 \geq 0$, $3-x > 0$ $\quad$ $x \geq 1$, $x < 3$

6. Le condizioni di esistenza dell'espressione: $\sqrt{7x} + \sqrt[6]{3-x} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{x-2}} + \frac{5x}{x-1}$ sono:

$C.E.$: $0 \leq x < 1 \quad \vee \quad 1 < x < 2 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3$

$\begin{cases} 7x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$



Prima proprietà fondamentale

$$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a} \qquad \begin{array}{ll} a \geq 0 & se\ \ n\ \text{è}\ pari \\ a \in R & se\ \ n\ \text{è}\ dispari \end{array}$$

Esempi

1. $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3 = -5$ $\qquad$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$ $\qquad$ $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$
2. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\right)^3 = 1-\sqrt{5}$ $\qquad$ $\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^3 = a-5$
3. $\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^4 = a-5$ se $a-5 \geq 0$ cioè se $a \geq 5$.

Seconda proprietà fondamentale

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^n}} = \begin{cases} |\boldsymbol{a}| & se \ \ n \ \text{è} \ pari \\ \\ \boldsymbol{a} & se \ \ n \ \text{è} \ dispari \end{cases}$$

Esempi

1. $\sqrt[3]{a^3} = a$
2. $\sqrt[3]{5^3} = 5$
3. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
4. $\sqrt[4]{a^4} = |a| = \begin{cases} +a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$
5. $\sqrt[4]{5^4} = |5| = +(5) = 5$
6. $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = -(-5) = 5$
7. $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-1\right)^4} = \left|\sqrt{3}-1\right| = +\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}-1$ perché $\sqrt{3}-1 > 0$
8. $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4} = \left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$ perché $\sqrt{3}-1 < 0$
9. $\sqrt[2]{4a^2-12a+9} = \sqrt[2]{(2a-3)^2} = |2a-3| = \begin{cases} +(2a-3) & se\ a \geq \frac{3}{2} \\ -(2a-3) & se\ a < \frac{3}{2} \end{cases}$
10. $\sqrt[6]{(25a^2+30a+9)^3} = \sqrt[6]{[(5a+3)^2]^3} = \sqrt[6]{(5a+3)^6} = |5a+3| = \begin{cases} +(5a+3) & se\ a \geq -\frac{3}{5} \\ -(5a+3) & se\ a < -\frac{3}{5} \end{cases}$
11. $\sqrt[2]{4a^4+12a^2+9} = \sqrt[2]{(2a^2+3)^2} = |2a^2+3| = 2a^2+3$

    perché $2a^2+3 > 0 \ \ \forall a \in R$
12. $\sqrt[3]{8a^3+36a^2+54a+27} = \sqrt[3]{(2a+3)^3} = 2a+3$
13. $\sqrt[4]{(-2a^2-3)^4} = |-2a^2-3| = -(-2a^2-3) = 2a^2+3$

    perché $-\mathbf{2}a^2-\mathbf{3} < 0 \qquad \forall a \in R$

Segno del radicale

la radice n-esima di un numero reale a, se esiste:

- è sempre positiva o nulla se n è pari;
- ha lo stesso segno del radicando se n è dispari

Esempi

1. $\sqrt[2]{9} = 3 > 0$ $\sqrt[2]{-9}$ non esiste $\sqrt[2]{0} = 0$
2. $\sqrt[3]{8} = 2 > 0$ $\sqrt[3]{-8} = -2 < 0$

Proprietà invariantiva dei radicali

Il valore di un radicale, con **radicando positivo o nullo**, non cambia moltiplicando per uno stesso numero naturale positivo sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando.

In simboli: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^p}} = \sqrt[n\cdot k]{\boldsymbol{a^{p\cdot k}}} \qquad a \geq 0\,,\ \ n \in N^+,\ \ k \in N^+$

Dimostrazione

Ricordiamo innanzitutto che: $[\ x = y\ ] \quad \Leftrightarrow \quad [\ x^n = y^n \quad \forall n \in N - \{0\}\ ]$

	Primo membro	Secondo membro
	$\sqrt[n]{\boldsymbol{a^p}}$	$\sqrt[n\cdot k]{\boldsymbol{a^{p\cdot k}}}$
Eleviamo i due radicali allo stesso indice $\boldsymbol{n\cdot k}$	$= \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a^p}}\right)^{\boldsymbol{n\cdot k}}$	$= \left(\sqrt[n\cdot k]{\boldsymbol{a^{p\cdot k}}}\right)^{\boldsymbol{n\cdot k}}$
Per la proprietà della potenza di una potenza	$= \left[\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a^p}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right]^{\boldsymbol{k}}$	$\boldsymbol{a^{p\cdot k}}$
Per la proprietà fondamentale	$= (\boldsymbol{a^p})^{\boldsymbol{k}}$	
Per la proprietà della potenza di una potenza	$= \boldsymbol{a^{p\cdot k}}$	

Esempi

1. $\sqrt[2]{625} = \sqrt[2]{5^4} = \sqrt[2\cdot 3]{5^{4\cdot 3}} = \sqrt[6]{5^{12}}$
2. $\sqrt[2]{125} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt[2\cdot 4]{5^{3\cdot 4}} = \sqrt[8]{5^{12}}$
3. $\sqrt[4]{-16}$ non esiste
4. $\sqrt[2]{x} = \sqrt[2\cdot 3]{x^{1\cdot 3}}$ con la condizione di esistenza $x \geq 0$ *(Se* $\boldsymbol{x} < 0$ *il radicale non esiste)*
5. $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4\cdot 3]{x^{2\cdot 3}} = \sqrt[12]{x^6} \quad \forall x \in R$ perchè $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in R$
6. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3\cdot 2]{8^2}$
7. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3\cdot 5]{8^5}$
8. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ ERRATO perchè $\sqrt[3]{-8} = -2$.

   $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3\cdot 2]{8^2} = -\sqrt[6]{2^6} = -2$ CORRETTO
9. $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3\cdot 3]{8^3} = -\sqrt[9]{2^9} = -2$
10. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3\cdot 5]{?}$

    Per poter applicare la proprietà invariantiva occorre che sia $x \geq 0$.
    Distinguiamo pertanto i due casi:

    se $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[15]{x^5}$

    se $x < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[15]{(-x)^5} = -\sqrt[15]{-x^5} = -\left(-\sqrt[15]{x^5}\right) = +\sqrt[15]{x^5}$.

    In conclusione, in entrambi i casi si ha lo stesso risultato:

    $\sqrt[3]{x} = \sqrt[15]{x^5} \qquad \forall x \in R$.
11. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3\cdot 2]{?}$

    Per poter applicare la proprietà invariantiva occorre che sia $x \geq 0$.
    Distinguiamo pertanto i due casi:

    se $x \geq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$

    se $x < 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[6]{(-x)^2} = -\sqrt[6]{x^2}$.

    Questa volta invece: $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} +\sqrt[6]{x^2} & se\ \ x \geq 0 \\ -\sqrt[6]{x^2} & se\ \ x < 0 \end{cases}$

Semplificazione di un radicale

Un radicale $\sqrt[n]{a^p}$ si dice **irriducibile** se l'indice del radicale n e l'esponente del radicando p sono primi tra loro.

Esempio

$\sqrt[3]{4}$ è irriducibile perché $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$ e $M.C.D.(3;2) = 1$

Per **semplificare** un radicale occorre:

1. dividere l'indice del radicale e l'esponente del radicando per il loro M.C.D.
2. verificare le condizioni di esistenza e la concordanza dei segni dei due membri dell'uguaglianza.

Esempi

1. $\sqrt[15]{2^9} = \sqrt[5]{2^3}$ $\quad$ $\sqrt[15]{7^{12}} = \sqrt[5]{7^4}$ $\quad$ $\sqrt[5]{7^5} = 7$
2. $\sqrt[12]{7^9} = \sqrt[4]{7^3}$ $\quad$ $\sqrt[4]{7^2} = \sqrt[2]{7}$ $\quad$ $\sqrt[4]{7^4} = 7$
3. $\sqrt[3]{-2^6} = -\sqrt[3]{2^6} = -2^2 = -4$
4. $\sqrt[15]{(-2)^9} = \sqrt[15]{-2^9} = -\sqrt[15]{2^9} = -\sqrt[5]{2^3}$
5. I due esempi: $\sqrt[15]{2^9} = \sqrt[5]{2^3}$ e $\sqrt[15]{(-2)^9} = -\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{(-2)^3}$
   ci suggeriscono la seguente regola per la semplificazione:
   $\sqrt[15]{x^9} = \sqrt[5]{x^3}$
6. $\sqrt[12]{-7^9} = \nexists$ $\quad$ perché $-7^9 < 0$
7. $\sqrt[4]{-7^2} = \nexists$ $\quad$ perché $-7^2 < 0$
8. $\sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$ $\quad$ CORRETTO
   $\sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt{-7}$ $\quad$ ERRATO $\quad$ *perché* $I\ membro = \sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt[4]{+49} = \sqrt[2]{7}$
   $II\ membro = \sqrt{-7} = \nexists$
9. I due esempi: $\sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$ e $\sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt{7}$
   ci suggeriscono la seguente regola per la semplificazione:
   $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[2]{|x|}$
10. $\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$ $\quad$ CORRETTO
    $\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[3]{-7}$ $\quad$ ERRATO $\quad$ *perché* $I\ membro = \sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[6]{+49} == +\sqrt[3]{7}$
    $II\ membro = \sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7}$
11. I due esempi: $\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[3]{7}$
    ci suggeriscono la seguente regola per la semplificazione:
    $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$
12. I due esempi: $\sqrt[6]{7^3} = \sqrt[2]{7}$ e $\sqrt[6]{(-7)^3} = \nexists$

    ci suggeriscono la seguente regola per la semplificazione:
    $\sqrt[6]{x^3} = \begin{cases} \sqrt[2]{x} & se\ \ x \geq 0 \\ \nexists & se\ \ x < 0 \end{cases}$ $\quad$ cioè: $\quad$ $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[2]{x}\,,\ \ x \geq 0$

Semplificazione di un radicale – Regola pratica

Per **semplificare** un radicale è utile applicare la seguente regole pratica:

- utilizzare il valore assoluto quando: $\sqrt[pari]{a^{pari}} = \sqrt[n]{|a^{dispari}|}$
- aggiungere il C.E. quando: $\sqrt[pari]{a^{dispari}} = \sqrt[pari]{a^{dispari}}$, $C.E.:\ a \geq 0$

Esempi

1. $\sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[7]{a^4}$
2. $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$
3. $\sqrt[6]{x^9} = \sqrt[2]{x^3}$ $con\ C.E.:\ x \geq 0$
4. $\sqrt[6]{x^6} = |x|$
5. $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$
6. $\sqrt[24]{a^{12}} = \sqrt[2]{|a|}$
7. $\sqrt[12]{\left(1-\sqrt{3}\right)^6} = \sqrt[2]{\left|1-\sqrt{3}\right|} = \sqrt[2]{-\left(1-\sqrt{3}\right)} = \sqrt[2]{-1+\sqrt{3}}$ perché $1-\sqrt{3} < 0$
8. $\sqrt[6]{(x-2)^4} = \sqrt[3]{(x-2)^2}$
9. $\sqrt[2]{x^2-4x+4} = \sqrt[2]{(x-2)^2} = |x-2|$
10. $\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1} = \sqrt[6]{(x-1)^3} = \sqrt[2]{x-1}$ con $C.E.:\ \forall x \geq 1$
11. $\sqrt[2]{x^4+6x^2+9} = \sqrt[2]{(x^2+3)^2} = |x^2+3| = x^2+3$ perchè $x^2+3 > 0 \quad \forall x \in R$.

Riduzione di più radicali allo stesso indice

Per ridurre più radicali allo stesso indice occorre:

1. semplificare i radicali
2. determinare il m.c.m. degli indici dei radicali
3. applicare la proprietà invariantiva in modo da trasformare ciascun radicale in uno equivalente avente per indice il m.c.m. degli indici dei radicali.

Esempi

1. $\left(\sqrt[3]{3a^4} \ ; \ \sqrt[4]{25} \right)$; $\left(\sqrt[3]{3a^4} \ ; \ \sqrt[2]{5} \right)$ $m.c.m.(3;2) = 6$; $\left(\sqrt[6]{(3a^4)^2} \ ; \ \sqrt[6]{5^3} \right)$.
2. $\left(\sqrt[6]{9a^8} \ ; \ \sqrt[24]{8a^6} \right)$; $\left(\sqrt[6]{3^2a^8} \ ; \ \sqrt[24]{2^3a^6} \right)$; $\left(\sqrt[3]{3a^4} \ ; \ \sqrt[8]{2a^2} \right)$
   $m.c.m.(3;8) = 24$; $\left(\sqrt[24]{(3a^4)^8} \ ; \ \sqrt[24]{(2a^2)^3} \right)$
3. $\left(\sqrt{a} \ ; \ \sqrt[4]{a^3} \ ; \ \sqrt[12]{a^5} \right)$; $\left(\sqrt[12]{a^6} \ ; \ \sqrt[12]{a^9} \ ; \ \sqrt[12]{a^5} \right)$ con C.E.: $a \geq 0$
4. $\left(\sqrt{x-1} \ ; \ \sqrt[3]{x-5} \ ; \ \sqrt[4]{6-x} \right)$ C.E.: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$ $1 \leq x \leq 6$
   Inoltre il radicale cubico $\sqrt[3]{x-5}$ cambia segno in tale intervallo.
   $\sqrt[3]{x-5} \geq 0$ per $5 \leq x \leq 6$ $\sqrt[3]{x-5} < 0$ per $1 \leq x < 5$
   Pertanto si hanno i seguenti due casi :
   Per $5 \leq x \leq 6$ $\Rightarrow$ $\left(\sqrt[12]{(x-1)^6} \ ; \ +\sqrt[12]{(x-5)^4} \ ; \ \sqrt[12]{(6-x)^3} \right)$
   Per $1 \leq x < 5$ $\Rightarrow$ $\left(\sqrt[12]{(x-1)^6} \ ; \ -\sqrt[12]{(x-5)^4} \ ; \ \sqrt[12]{(6-x)^3} \right)$
   perché $\sqrt[3]{x-5} = -\sqrt[3]{-(x-5)} = -\sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[12]{(5-x)^4} = -\sqrt[12]{(x-5)^4}$ con $-(x-5) \geq 0$
5. $\left(\sqrt[3]{x-4} \ ; \ \sqrt{x-1} \right)$ C.E.: $x \geq 1$
   Inoltre $\sqrt[3]{x-4}$ cambia segno in tale intervallo.
   $\sqrt[3]{x-4} \geq 0$ per $x \geq 4$ $\sqrt[3]{x-4} < 0$ per $1 \leq x < 4$
   Pertanto si hanno i seguenti due casi :
   per $x \geq 4$ $\Rightarrow$ $\left(+\sqrt[6]{(x-4)^2} \ ; \ \sqrt[6]{(x-1)^3} \right)$
   Per $1 \leq x < 4$ $\Rightarrow$ $\left(-\sqrt[6]{(x-4)^2} \ ; \ \sqrt[6]{(x-1)^3} \right)$

Confronto di radicali

Fra due radicali positivi aventi lo stesso indice, il maggiore è quello che ha il radicando maggiore.

Esempi

1. $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{7}$
2. $\sqrt[7]{3} < \sqrt[7]{5}$
3. $\left(\sqrt[6]{3} \ ; \ \sqrt[4]{2} \right)$ $m.c.m.(6;4) = 12$ $\Rightarrow$ $\sqrt[12]{3^2}$ e $\sqrt[12]{2^3}$ $\sqrt[12]{9} > \sqrt[12]{8}$
4. $\left(\sqrt[7]{3} \ ; \ \sqrt[4]{2} \right)$ $m.c.m.(7;4) = 28$ $\Rightarrow$ $\sqrt[28]{3^4}$ e $\sqrt[28]{2^7}$ $\sqrt[28]{81} < \sqrt[28]{128}$

Moltiplicazione di radicali

Nell'ipotesi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali, il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è uguale al radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

In simboli: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$ con $a \geq 0 \quad \wedge \quad b \geq 0$

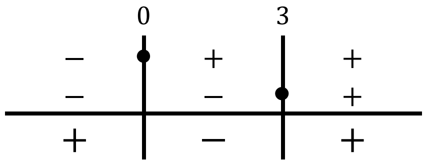
Esempi

1. $\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$
2. $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[10]{6} = \sqrt[20]{6^5} \cdot \sqrt[20]{6^2} = \sqrt[20]{6^5 \cdot 6^2}$
3. $\sqrt[5]{3a^2} \cdot \sqrt[5]{2a} = \sqrt[5]{6a^3}$
4. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
5. $\sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{7^2} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{7^2 \cdot 5^3}$
6. $\sqrt[7]{5a^3} \cdot \sqrt[7]{4a^2} = \sqrt[7]{20a^5}$
7. $\sqrt[2]{-4} \cdot \sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{(-4)\cdot(-4)} = \sqrt[2]{16} = 4$ è un'uguaglianza errata. Perché ?
8. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a-3} = \sqrt{a \cdot (a-3)}$ con C.E.: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a-3 \geq 0 \end{cases}$ ossia $a \geq 3$.
9. Trasformare il radicale $\sqrt{a \cdot (a-3)}$ nel prodotto di due radicali.

   Calcoliamo le condizioni di esistenza:

   $a \cdot (a-3) \geq 0 ; \quad \begin{matrix} a \geq 0 & a \geq 0 \\ a-3 \geq 0 & a \geq 3 \end{matrix}$

   $C.E.: \ a \leq 0 \ \vee \ a \geq 3$



   Pertanto per $a \leq 0 \ \vee \ a \geq 3$ si ha:

   $$\sqrt{a \cdot (a-3)} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|a-3|} = \begin{cases} \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-(a-3)} & per \ a \leq 0 \\ \sqrt{+a} \cdot \sqrt{+(a-3)} & per \ a \geq 3 \end{cases}$$

Divisione di radicali

Nell'ipotesi che siano verificate le condizioni di esistenza dei radicali, il quoziente dei due radicali aventi lo stesso indice è uguale al radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

In simboli: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}}$ $\forall \boldsymbol{a \geq 0} \quad \wedge \quad \forall \boldsymbol{b} > 0$

Esempi

1. $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4:2} = \sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[6]{9} : \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{9:3} = \sqrt[6]{3}$
3. $\sqrt[3]{4} : \sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{4^2} : \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2}$
4. $\sqrt[4]{6} : \sqrt[10]{6} = \sqrt[20]{6^5} : \sqrt[20]{6^2} = \sqrt[20]{6^5 : 6^2} = \sqrt[20]{6^3}$
5. $\sqrt[7]{5a^6} : \sqrt[7]{3a^2} = \sqrt[7]{\frac{5}{3}a^4}$
6. $\sqrt[5]{3a^2} : \sqrt[5]{2a} = \sqrt[5]{\frac{3a^2}{2a}} = \sqrt[5]{\frac{3}{2}a}$
7. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-3}} = \sqrt{\frac{a}{a-3}}$ con C.E.: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a-3 > 0 \end{cases}$ ossia $a > 3$.

Trasporto di un fattore dentro al segno di radice di indice dispari

Per trasportare un fattore esterno sotto il segno di radice di indice dispari, come fattore del radicando, occorre elevarlo all'indice del radicale.

In simboli: $\boldsymbol{a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}}$ $\forall\ \boldsymbol{a, b \in R \quad \wedge \quad n\ dispari}$

Dimostrazione

Applicando la proprietà fondamentale dei radicali aritmetici: $\forall a \in R \qquad a = \sqrt[n]{a^n}$.

si ottiene: $a \cdot \sqrt[n]{b} \quad = \quad \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} \quad = \quad \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

Esempi

1. $3\sqrt[5]{2} \ = \ \sqrt[5]{3^5 \cdot 2}$
2. $2\sqrt[7]{3} \ = \ \sqrt[7]{2^7 \cdot 3} \ = \ \sqrt[7]{384}$
3. $-2\sqrt[3]{5} \ = \ \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} \ = \ \sqrt[3]{-8 \cdot 5} \ = \ \sqrt[3]{-40} \ = \ -\sqrt[3]{40}$
4. $-4\sqrt[3]{5} \ = - \ \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} \ = \ -\sqrt[3]{320}$
5. $a\sqrt[5]{b} \ = \ \sqrt[5]{a^5 \cdot b}$
6. $a\sqrt[3]{b} \ = \ \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$
7. $3a^2\sqrt[3]{b} \ = \ \sqrt[3]{(3a^2)^3 b}$
8. $7a^4\sqrt[5]{b} \ = \ \sqrt[5]{(7a^4)^5 b}$
9. $\boldsymbol{(a-1) \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{a^2-2a+1}} \ = \ \sqrt[3]{(a-1)^3 \cdot \frac{2}{(a-1)^2}} \ = \ \sqrt[3]{2 \cdot (a-1)}}$
10. $(1-2a) \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{4a^2-4a+1}} \ = \ \sqrt[5]{(1-2a)^5 \cdot \frac{3}{(1-2a)^2}} \ = \ \sqrt[5]{3 \cdot (1-2a)^3}$

Trasporto di un fattore dentro al segno di radice di indice pari

Se l'indice del radicale è un numero pari è possibile portare sotto il segno di radice solo fattori positivi.

In simboli: $\boldsymbol{a \cdot \sqrt[n]{b} \;=\; \sqrt[n]{a^n \cdot b} \qquad \forall\, a, b \in R_0^+ \quad \wedge \quad n\ pari}$

Esempi

1. $2\sqrt[4]{5} \;=\; \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$
2. $3\sqrt[2]{5} \;=\; \sqrt[2]{3^2 \cdot 5}$
3. $-2\sqrt[4]{5} \;=\; -\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} \;=\; -\sqrt[4]{80}$
4. La scrittura: $-2\sqrt[4]{5} \;=\; \sqrt[4]{(-2)^4 \cdot 5} \;=\; \sqrt[4]{80}$ è, evidentemente, errata.

   Infatti $-2\sqrt[4]{5}$ è un numero negativo, mentre $\sqrt[4]{80}$ è un numero positivo.

5. $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5} \;=\; -\sqrt[2]{3^2 \cdot 5} \;=\; -\sqrt[2]{45}}$

   La scrittura: $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5} \;=\; \sqrt[2]{(-3)^2 \cdot 5} \;=\; \sqrt[4]{45}}$ è, evidentemente, errata.

   Infatti $\boldsymbol{-3\sqrt[2]{5}}$ è un numero negativo, mentre $\boldsymbol{\sqrt[4]{45}}$ è un numero positivo.

6. $\left(2-\sqrt{7}\right)\sqrt[4]{a}$

   Essendo $\left(2-\sqrt{7}\right)$ un numero negativo non lo si può portare sotto il segno di radice.
   Ma riscrivendolo sotto la forma: $-\left(\sqrt{7}-2\right)$ si può portare sotto il segno di radice il fattore positivo $\left(\sqrt{7}-2\right)$ e si ottiene: $-\left(\sqrt{7}-2\right)\sqrt[4]{a} \;=\; -\sqrt[4]{\left(\sqrt{7}-2\right)^4 a}$

7. $\left(1-\sqrt{5}\right)\sqrt[4]{x}$

   Essendo $\left(1-\sqrt{5}\right)$ un numero negativo non lo si può portare sotto il segno di radice.
   Ma riscrivendolo sotto la forma: $-\left(\sqrt{5}-1\right)$ si può portare sotto il segno di radice il fattore positivo $\left(\sqrt{5}-1\right)$ e si ottiene: $-\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt[4]{x} \;=\; -\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-1\right)^4 x}$

8. $a\sqrt[6]{b}$ Essendo a una variabile di cui non si conosce il segno, occorre distinguere due casi:

   se $a \geq 0$ si ha che: $a\sqrt[6]{b} \;=\; \sqrt[6]{a^6 b}$

   se $a < 0$ riscrivendo $a = -(-a)$ si può portare sotto la radice il fattore positivo

   $\Rightarrow \quad a\sqrt[6]{b} \;=\; -(-a)\sqrt[6]{b} \;=\; -\sqrt[6]{(-a)^6\, b} \;=\; -\sqrt[6]{a^6\, b}$

   In definitiva si ha: $\sqrt[6]{b} \;=\; \begin{cases} +\sqrt[6]{a^6\, b} & se\ \ a \geq 0 \\ -\sqrt[6]{a^6\, b} & se\ \ a < 0 \end{cases}$

9. $a\sqrt[4]{x}$ Essendo a una variabile di cui non si conosce il segno, occorre distinguere due casi:

   se $a \geq 0$ si ha che: $a\sqrt[4]{x} \;=\; \sqrt[4]{a^4\, x}$

   se $a < 0$ riscrivendo $a = -(-a)$ si può portare sotto la radice il fattore positivo

   $\Rightarrow \quad a\sqrt[4]{x} \;=\; -(-a)\sqrt[4]{x} \;=\; -\sqrt[4]{(-a)^4\, x} \;=\; -\sqrt[4]{a^4\, x}$

   In definitiva si ha: $a\sqrt[4]{x} \;=\; \begin{cases} +\sqrt[4]{a^4\, x} & se\ \ a \geq 0 \\ -\sqrt[4]{a^4\, x} & se\ \ a < 0 \end{cases}$

10. $\boldsymbol{(a-3)\sqrt[2]{x}} \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{+\sqrt[2]{(a-3)^2\, x}} & \boldsymbol{se\ \ a-3 \geq 0} & \boldsymbol{cio\grave{e}\ se\ \ a \geq 3} \\ \boldsymbol{-\sqrt[2]{(a-3)^2\, x}} & \boldsymbol{se\ \ a-3} < 0 & cio\grave{e}\ se\ \ a < 3 \end{cases}$

11. $\boldsymbol{(2x-3)\sqrt[4]{x}} \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{+\sqrt[4]{(2x-3)^4\, x}} & \boldsymbol{se\ \ 2x-3 \geq 0} & \boldsymbol{cio\grave{e}\ se\ \ x \geq \frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{-\sqrt[4]{(2x-3)^4\, x}} & \boldsymbol{se\ \ 2x-3} < 0 & cio\grave{e}\ se\ \ x < \frac{3}{2} \end{cases}$

Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Se sotto il segno di radice compare un fattore con esponente maggiore o uguale all'indice del radicale, si può trasportare il fattore fuori dal segno di radice mediante il seguente procedimento:

1. si riscrive il radicale come prodotto di due radicali con lo stesso indice del radicale originario e aventi:
   - come I radicando, il fattore originario elevato al multiplo più grande dell'indice, inferiore all'esponente del radicando
   - come II radicando, il fattore originario elevato al resto della divisione fra l'esponente del radicando e l'indice del radicale
2. si effettua la semplificazione del I radicale (*vedi semplificazione di un radicale a pag. 4*).

Esempi

1. $\sqrt[7]{\mathbf{2^{38}}} = \sqrt[7]{\mathbf{2^{35}}} \cdot \sqrt[7]{\mathbf{2^{3}}} = \mathbf{2^{5}} \sqrt[7]{\mathbf{2^{3}}}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$

2. $\sqrt[5]{\mathbf{3^{32}}} = \sqrt[5]{\mathbf{3^{30}}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{3^{2}}} = \mathbf{3^{6}} \sqrt[5]{\mathbf{3^{2}}}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$

3. $\sqrt[5]{\mathbf{2^{48}}} = \sqrt[5]{\mathbf{2^{45}}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{2^{3}}} = \mathbf{2^{9}} \sqrt[5]{\mathbf{2^{3}}}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 9 \end{array}$

4. $\sqrt[4]{\mathbf{2^{31}}} = \sqrt[4]{\mathbf{2^{28}}} \cdot \sqrt[4]{\mathbf{2^{3}}} = \mathbf{2^{7}} \sqrt[4]{\mathbf{2^{3}}}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 31 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 7 \end{array}$

5. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$
7. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
8. $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
9. $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
10. $\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
11. $\sqrt[3]{a^{16}} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^5 \sqrt[3]{a}$
12. $\sqrt[3]{a^{17}} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^5 \sqrt[3]{a^2}$
13. $\sqrt[6]{x^6} = |x|$ $\qquad \sqrt{x^4} = x^2$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$
14. $\sqrt[6]{x^{12}} = x^2$ $\qquad \sqrt[4]{x^{12}} = |x^3|$ $\qquad \sqrt{x^6} = |x^3|$
15. $\sqrt[4]{2x^4} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{2} = |x|\sqrt[4]{2}$
16. $\sqrt[4]{x^4 y} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} = |x|\sqrt[4]{y}$ con C.E.: $y \geq 0$
17. $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$ con C.E.: $y \geq 0$
18. $\sqrt[3]{x^3 y} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y} = x\sqrt[3]{y}$
19. $\sqrt[5]{x^{13} y} = \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{x^3 y} = x^2 \sqrt[5]{x^3 y}$
20. $\sqrt[5]{x^8 y} = \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^3 y} = x\sqrt[5]{x^3 y}$
21. $\sqrt[6]{x^{11}}$ Il radicale esiste per $x^{11} \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$
    $\sqrt[6]{x^{11}} = \sqrt[6]{x^6} \cdot \sqrt[6]{x^5} = x \cdot \sqrt[6]{x^5}$ con $x \geq 0$

22. $\sqrt{x^5}$ Il radicale esiste per $x^5 \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$

$\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$ con $x \geq 0$

23. $\sqrt{x^3}$ Il radicale esiste per $x^3 \geq 0$ ossia per $x \geq 0$ $\Rightarrow$

$\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x \cdot \sqrt{x}$ con $x \geq 0$

24. $\sqrt[4]{(x-3)^5} = \sqrt[4]{(x-3)^4} \cdot \sqrt[4]{x-3} = (x-3) \cdot \sqrt[4]{x-3}$ con C.E.: $x \geq 3$

25. $\sqrt[4]{x^4(x-3)} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x-3} = |x| \cdot \sqrt[4]{x-3} = x \cdot \sqrt[4]{x-3}$ con C.E.: $x = 0 \;\vee\; x \geq 3$

26. $\sqrt[4]{x^4(-x-3)} = |x| \cdot \sqrt[4]{-x-3} = -x \cdot \sqrt[4]{-x-3}$ con C.E.: $x \leq -3 \;\vee\; x = 0$

27. $\sqrt[4]{x^5(x-3)} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} = |x| \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)}$ con C.E.: $x \leq 0 \;\vee\; x \geq 3$

che equivale a: $\sqrt[4]{x^5(x-3)} = \begin{cases} +x \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} & per \; x \geq 3 \\ -x \cdot \sqrt[4]{x \cdot (x-3)} & per \; x \leq 0 \end{cases}$

2. Addizione e sottrazione di radicali

Definizione

Due radicali irriducibili si dicono simili quando hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

Esempi

- $2\sqrt[4]{7}$ e $3\sqrt[4]{7}$ sono simili
- $4a^2\sqrt[3]{b}$ e $7a^3\sqrt[3]{b}$ sono simili

Addizione e sottrazione di radicali

La somma algebrica di due o più radicali simili è uguale ad un radicale, simile ai dati, che ha come coefficiente, la somma algebrica dei coefficienti dei radicali.

Esempi

$2\sqrt[4]{7} + 3\sqrt[4]{7} = 5\sqrt[4]{7}$ $\qquad$ $4a^2\sqrt[3]{b} - 7a^3\sqrt[3]{b} = (4a^2 - 7a^3)\sqrt[3]{b}$

Osservazione importante

$\cancel{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a+b}}$ $\qquad$ **Esempio :** $\sqrt{9} + \sqrt{4} \neq \sqrt{9+4}$

$\cancel{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a-b}}$ $\qquad$ **Esempio :** $\sqrt{9} - \sqrt{4} \neq \sqrt{9-4}$

Potenza di un radicale

La potenza k-esima di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza k-esima del radicando.

In simboli: $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{k}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}}$ $\forall a \geq 0$

Esempio

1. $\left(\sqrt[5]{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt[5]{\mathbf{3}^{\mathbf{4}}}$
2. $\left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2}^{\mathbf{2}}\left(\sqrt{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{6} = \mathbf{24}$
3. $\left(\sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}\cdot\mathbf{4}}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{8}}} = \sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{5}}} \cdot \sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}} = \boldsymbol{a}\sqrt[5]{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}$
4. $\left(\sqrt[4]{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{4}} = \boldsymbol{x}-\mathbf{3}$ con $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{3}$

Radice di un radicale

La radice k-esima di un radicale è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando lo stesso radicando.

In simboli: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n\cdot k]{\boldsymbol{a}}$ $\forall a \geq 0$

Esempio

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\mathbf{64}}} = \sqrt[2\cdot 3]{\mathbf{2}^{\mathbf{6}}} = \mathbf{2}$
2. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[5\cdot 3]{\boldsymbol{a}}$
3. $\sqrt[5]{-\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = -\sqrt[5]{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}} = -\sqrt[15]{\boldsymbol{a}}$
4. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\boldsymbol{a}-\mathbf{3}}} = \sqrt[20]{\boldsymbol{a}-\mathbf{3}}$ con $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{3}$

Razionalizzazione di un radicale

La razionalizzazione è la trasformazione di una frazione contenente radicali al denominatore in un'altra equivalente priva di radicali al denominatore.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione occorre distinguere vari casi:

I caso – a denominatore compare un radicale quadratico $\sqrt{a}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale quadratico che figura a denominatore.

Esempi

$$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5\cdot5}}=\frac{7\sqrt{5}}{2\cdot5}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$$

$$\frac{7}{\sqrt{8}}=\frac{7}{\sqrt{2^3}}=\frac{7}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{2\cdot2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

II caso – a denominatore compare un radicale non quadratico $\sqrt[n]{a^p}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale $\sqrt[n]{a^{n-p}}$

Esempi

$$\frac{4}{\sqrt[7]{9}}=\frac{4}{\sqrt[7]{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{3^{7-2}}}{\sqrt[7]{3^{7-2}}}=\frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}\cdot\sqrt[7]{3^5}}=\frac{4\sqrt[7]{243}}{\sqrt[7]{3^2\cdot3^5}}=\frac{4\sqrt[7]{243}}{\sqrt[7]{3^7}}=\frac{4\sqrt[7]{243}}{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt[7]{8}}=\frac{4}{\sqrt[7]{2^3}}=\frac{4}{\sqrt[7]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}}=\frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[7]{2^4}}=\frac{4\sqrt[7]{16}}{\sqrt[7]{2^7}}=\frac{4\sqrt[7]{16}}{2}=2\sqrt[7]{16}$$

III caso – a denominatore compare la somma o la differenza di due radicali quadratici $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

Esempi

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

$$\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{8\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{8\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}=4\sqrt{5}-4\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{7-2\sqrt{6}}=\frac{5}{7-2\sqrt{6}}\cdot\frac{7+2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}}=\frac{5\left(7+2\sqrt{6}\right)}{(7)^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\frac{5\left(7+2\sqrt{6}\right)}{49-24}=\frac{5\left(7+2\sqrt{6}\right)}{25}$$

$$=\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$$

IV caso – a denominatore compare la somma algebrica di tre radicali quadratici $\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \mp \sqrt{c}$

Occorre applicare due volte il metodo utilizzato nel II caso.

Esempio

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} = \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1} = \frac{4 \cdot [(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+3+2\sqrt{6}-1} =$$

$$= \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{4+2\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+\sqrt{6}} \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{2 \cdot (2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{6})}{2^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4-6} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2}-2)}{-2} = \sqrt{2}-\sqrt{6}+2$$

V caso – a denominatore compare la somma o la differenza di due radicali cubici $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$

Occorre moltiplicare numeratore e denominatore per il fattore $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}$

Esempi

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4 \cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4 \cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6\,(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4})^3+(\sqrt[3]{2})^3} =$$

$$= \frac{6\,(2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4})}{4+2} = 2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}\,.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\,.$$

Radicale quadratico doppio

Un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ è detto radicale quadratico doppio.

Se l'espressione a^2-b è un quadrato perfetto il radicale doppio può essere trasformato nella somma di due radicali semplici con le seguenti formule:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

1. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ essendo $a^2-b = 5^2-24=1$ il radicale doppio si può semplificare:

   $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

2. $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-\sqrt{4^2\cdot 3}} = \sqrt{8-\sqrt{48}}$

   essendo $a^2-b = 8^2-48=16$ il radicale doppio si può semplificare:

$$\sqrt{8-\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{16}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{8+4}{2}} - \sqrt{\frac{8-4}{2}} = = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Potenza ad esponente frazionario

La potenza di un numero reale positivo con esponente frazionario è uguale al radicale che ha per indice il denominatore della frazione e per esponente del radicando il numeratore della frazione.

In simboli: $\boldsymbol{a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}}$ $\qquad \forall\, a \geq 0$

Esempi

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ infatti $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{8}{125}}$$