MONOMI

Monomio

Un **monomio** è il prodotto di più fattori costituiti da numeri e da lettere aventi per esponenti numeri naturali.

Monomi	
$b \cdot h$	l^2
$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 3h$	$\left(1 - \frac{3}{2}\right) b \cdot h$
$-0{,}7b \cdot 5h^2$	$3x^0$

Non sono monomi	
$v + at$	$a + b - c$
$\frac{ab}{x^3}$	$3xy^{-2} = \frac{3x}{y^2}$
$\frac{5}{xy}$	$\frac{a+b}{2} \cdot h$

Monomio privo di lettere	
3	$3 = 3x^0 = 3a^0 = 3a^0x^0$

Monomio nullo	
0	$0 = 0a^0 = 0x^0 = 0a^0x^0$

Monomio ridotto a forma normale

Un monomio è **ridotto a forma normale** quando è scritto come prodotto fra un numero e una o più lettere, diverse fra loro, con eventuali esponenti.

Monomio non ridotto a forma normale	
$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 3h$	$\left(1 - \frac{3}{2}\right) b \cdot h$
$-0{,}7b \cdot 5h^2$	$3 \cdot a \cdot 2x^0$

Monomio ridotto a forma normale	
$\frac{3}{2}bh$	$-\frac{1}{2}bh$
$-\frac{7}{2}bh^2$	$6a$

Coefficiente e parte letterale

In un monomio ridotto a forma normale, il fattore numerico è il **coefficiente**, le lettere sono la **parte letterale**.

Monomio	Coefficiente	Parte letterale
$-\frac{7}{2}bh^2$	$-\frac{7}{2}$	bh^2
$-xy^3z^2$	-1	xy^3z^2

Monomio	Coefficiente	Parte letterale
bh	1	$b \cdot h$
3	3	x^0 oppure a^0x^0

Grado di un monomio

Il **grado** di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere.

Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente con cui compare la lettera.

Monomio	Grado	Grado rispetto alla lettera				
		a	b	c	x	y
$-\frac{7}{2}bc^5x^2$	8	0	1	5	2	0
$-2ab^5x^2y^3$	11	1	5	0	2	3

OPERAZIONI CON I MONOMI

Monomi simili

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

Monomi simili		
$2ab$	e	$3ba$
$2ab^2$	e	$3ab^2$
2	e	$5x^0$

Monomi non simili		
$2ax$	e	$3ay$
$2a^2b$	e	$3ab^2$
2	e	$5x$

Addizione e sottrazione di monomi

La **somma algebrica** di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.
Se i monomi non sono simili la somma algebrica non può essere eseguita.

Operazione corretta
$2a + 3a = 5a$
$\frac{3}{4}a - \frac{5}{6}a \; = \; \frac{9-10}{12}\,a \; = \; -\frac{1}{12}a$

Operazione non corretta
$2a + 3b = 5ab$
$2a + 3a = 5a^2$

Monomi opposti

Due monomi sono opposti se sono simili ed hanno coefficienti opposti *(i monomi differiscono solo per il segno)*.
La somma di due monomi opposti è 0.

$$5x \; + \; (-5x) \; = \; 5x - 5x \; = \; (5-5)x \; = \; 0$$

Moltiplicazione di monomi

Il **prodotto** fra monomi è un monomio che ha:

- per coefficiente, il prodotto dei coefficienti
- per parte letterale, il prodotto delle parti letterali *(si esegue la somma degli esponenti delle lettere uguali)* .

Operazione corretta
$2a^2 \cdot 3a^5 \; = \; (2 \cdot 3)\, a^{2+5} \; = \; 6\,a^7$
$\left(\frac{2}{3}a^3b\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}a^4x^2\right) \; = \; -\frac{5}{9}a^7bx^2$

Operazione non corretta
$2a^2 \cdot 3a^5 = 6a^{10}$
$2a \cdot 3a = 6a$

Potenza di un monomio

La **potenza** di un monomio è un monomio che ha:

- per coefficiente, la potenza del coefficiente
- per parte letterale, la potenza della parte letterale *(si moltiplicano gli esponenti delle lettere per l'esponente della potenza)* .

Operazione corretta
$(3a^3)^2 \; = \; 3^2 \cdot (a^3)^2 \; = \; 9\,a^6$
$\left(-\frac{2}{3}a^3b\right)^2 \; = \; +\frac{4}{9}a^6b^2$

Operazione non corretta
$(3a^3)^2 = 9a^9$
$(3a^3)^2 = 6a^6$

Divisibilità fra monomi

Un monomio *(dividendo)* è **divisibile** per un altro monomio non nullo *(divisore)* quando in esso compaiono tutte le lettere del divisore, con gli esponenti maggiori o uguali.

$5a^3bx^5$ è divisibile per $3a^2bx$	$\boldsymbol{3a^2bx}$ non è divisibile per $\boldsymbol{5a^3bx^5}$

Divisione fra due monomi

Dati due monomi, il primo divisibile per il secondo, il loro **quoziente** è un monomio che ha:

- per coefficiente, il quoziente dei coefficienti
- per parte letterale, il quoziente delle parti letterali *(si esegue la differenza degli esponenti delle lettere uguali)* .

Operazione corretta
$5a^6 : 2a^3 = \frac{5}{2}a^{6-3} = \frac{5}{2}a^3$
$\left(\frac{2}{3}a^7bx^2\right) : \left(-\frac{5}{6}a^4x^2\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}a^{7-4}b\,x^{2-2} = -\frac{4}{5}a^3b$

Operazione non corretta
$5a^6 : 2a^3 = \frac{5}{2}a^2$
$5a^6 : 2a^3 = 3a^3$

Massimo comune divisore

Il **massimo comune divisore** (M.C.D.) fra due o più monomi è un monomio che ha:

- per coefficiente, il M.C.D. dei valori assoluti dei coefficienti *(1 se i coefficienti non sono tutti interi)*
- per parte letterale, il prodotto delle lettere comuni, ognuna presa una sola volta e con il minimo esponente.

Minimo comune multiplo

Il **minimo comune multiplo** (m.c.m.) fra due o più monomi è un monomio che ha:

- per coefficiente, il m.c.m.dei valori assoluti dei coefficienti *(1 se i coefficienti non sono tutti interi)*
- per parte letterale, il prodotto di tutte le lettere, ognuna presa una sola volta e con il massimo esponente.

$M.C.D.(4a^2bx^7 \;;\; 6a^4c^2x^3 \;;\; 18a^5c^2x) = 2a^2x$
$m.c.m.(4a^2bx^7 \;;\; 6a^4c^2x^3 \;;\; 18a^5c^2x) = 36a^5b\,c^2x^7$

POLINOMI

Polinomio

Un **polinomio** è la somma algebrica di due o più monomi.

Polinomi	
$b+h$	$5+l^2$

Non sono polinomi	
$\dfrac{a+b}{x}$	$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$

Polinomio particolare
$2a \;=\; 2a+0$

Polinomio nullo	
0	$0=0a+0b$

Polinomio ridotto a forma normale

Un polinomio è **ridotto a forma normale** quando non contiene monomi simili.

Polinomio non ridotto a forma normale
$2a-5b+a$
$2a^3b+4c^2-3x-6c^2+3x$

Polinomio ridotto a forma normale
$3a-5b$
$2a^3b-2c^2$

Binomio	Trinomio	Quadrinomio
$2a^3b+4c^2$	$2a^3b+4c^2-7$	$2a^3b+4c^2-2x-1$
Polinomio formato da 2 monomi non simili	*Polinomio formato da 3 monomi non simili*	*Polinomio formato da 4 monomi non simili*

Grado di un polinomio

Il **grado** di un polinomio, ridotto a forma normale, e il grado maggiore fra i gradi dei suoi termini.
Il **grado di un polinomio rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a tale lettera.

Polinomio	Grado	Grado rispetto alla lettera				
		a	b	c	x	y
$2a^3b+4b^5c^2-3xy^6-6a^4c^3+3x^4-y$	7	4	5	3	4	6

Polinomio omogeneo

Un polinomio, ridotto a forma normale, è **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

Polinomio omogeneo	Polinomio non omogeneo
$4a^2bx^7+6a^5b^2x^3-3a^5b^4x$	$4a^2bx^7+6a^4b^2x^3-3a^5b^2x$

Polinomio completo

Un polinomio, ridotto a forma normale, è **completo** rispetto a una lettera se per tale lettera presenta tutte le potenze, dal grado massimo fino al grado 0.

Polinomio completo rispetto alla lettera x	Polinomio non completo rispetto alla lettera x
$4x^2+6x-3$	$4x^4+6x^3-3x$

OPERAZIONI CON I POLINOMI

Addizione di polinomi

La somma di due polinomi è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

Sottrazione di polinomi

La differenza di due polinomi è un polinomio che si ottiene addizionando al primo (minuendo) l'opposto del secondo (sottraendo).

Addizione
$(5a^2 - 3a + 5b) + (2a - 7b + 4x) =$ $= 5a^2 - 3a + 5b + 2a - 7b + 4x =$ $= 5a^2 - a - 2b + 4x$

Sottrazione
$(5a^2 - 3a + 5b) - (2a - 7b + 4x) =$ $= 5a^2 - 3a + 5b - 2a + 7b - 4x =$ $= 5a^2 - 5a + 12b - 4x$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Il **prodotto di un monomio per un polinomio** è un polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio dato.

Moltiplicazione di due polinomi

Il **prodotto di due polinomi** è un polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo e addizionando tutti i prodotti ottenuti.

Prodotto di un monomio per un polinomio
$(-2x^3) \cdot (3a - b + 4x^2) =$ $= -6ax^3 + 2bx^3 - 8x^5$

Prodotto di due polinomi
$(2x^3 - y) \cdot (3a - b + 4x^2) =$ $= 6ax^3 - 2bx^3 + 8x^5 - 3ay + by - 4x^2y$

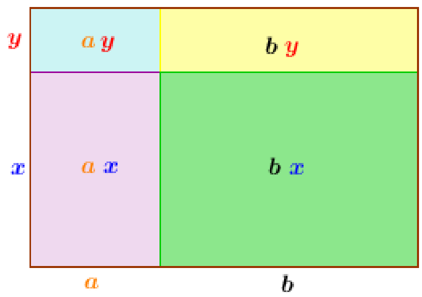
Interpretazione geometrica

L'area del rettangolo è $S = (a + b) \cdot (x + y)$.

Ma l'area del rettangolo è data anche dalla somma delle areee dei quattro rettangolini $S = ax + ay + bx + by$

Si conclude pertanto che:

$(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$



PRODOTTI NOTEVOLI

I **prodotti notevoli** sono particolari moltiplicazioni fra polinomi.

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

Il **prodotto della somma di due monomi per la loro differenza** è uguale alla differenza fra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo.

$$(I + II) \cdot (I - II) = I^2 - II^2$$

Dimostrazione

$$(I + II) \cdot (I - II) \quad = \quad I \cdot I - \cancel{I \cdot II} + \cancel{II \cdot I} - II \cdot II \quad = \quad I^2 - II^2$$

Esempi

$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3b) \cdot (2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$
$(x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 9$	$(2a^3 + 3b^2) \cdot (2a^3 - 3b^2) = 4a^6 - 9b^4$

Quadrato di un binomio

Il **quadrato di un binomio** è un trinomio i cui termini sono:
il quadrato del primo monomio,
il quadrato del secondo monomio,
il doppio prodotto del primo monomio per il secondo monomio.

$$(I + II)^2 = I^2 + 2 \cdot I \cdot II + II^2$$

Dimostrazione

$$(I + II)^2 = (I + II) \cdot (I + II) \quad = \quad I \cdot I + \underline{I \cdot II} + \underline{II \cdot I} + II \cdot II \quad = \quad I^2 + 2 \cdot I \cdot II + II^2$$

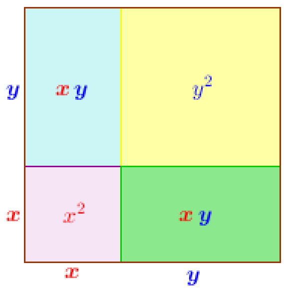
Esempi

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$
$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$	$(2a^3 - 3b^2)^2 = 4a^6 - 12a^3b^2 + 9b^4$

Interpretazione geometrica

L'area del quadrato è $S = (x + y)^2$.

Ma l'area del quadrato è data dalla somma delle aree dei due quadratini e dei due rettangolini:
$S = x^2 \underline{+ xy} \underline{+ xy} + y^2$
Si conclude pertanto che:
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$



Quadrato di un trinomio

Il **quadrato di un trinomio** è un polinomio *(di 6 termini)* che ha come termini:
i quadrati dei tre monomi,
i doppi prodotti di ciascun monomio per ogni monomio che lo segue.

$$(I + II + III)^2 =$$
$$= I^2 + II^2 + III^2 + 2 \cdot I \cdot II + 2 \cdot I \cdot III + 2 \cdot II \cdot III$$

Dimostrazione

$$(I + II + III)^2 = (I + II + III) \cdot (I + II + III) \quad =$$
$$= \quad I \cdot I + \underline{I \cdot II} + \underline{I \cdot III} + \underline{II \cdot I} + II \cdot II + \underline{II \cdot III} + \underline{III \cdot I} + \underline{III \cdot II} + III \cdot III \quad =$$
$$= I^2 + II^2 + III^2 + 2 \cdot I \cdot II + 2 \cdot I \cdot III + 2 \cdot II \cdot III$$

Esempi

$(x + y + z)^2$	$= \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
$(2x - 3y^2 - 4x^3z)^2$	$= \quad 4x^2 + 9y^2 + 16x^6z^2 - 12xy^2 - 16x^4z + 24x^3y^2z$

Cubo di un binomio

Il **cubo di un binomio** è un quadrinomio i cui termini sono: il cubo del primo monomio, il cubo del secondo monomio, il triplo del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo del quadrato del secondo monomio per il primo.	$(I+II)^3 \;=\; I^3+3\cdot I^2\cdot II+3\cdot I\cdot II^2+II^3$

Dimostrazione

$$(I+II)^3 \;=\; (I+II)\cdot(I+II)^2 \;=\; (I+II)\cdot(I^2+2\cdot I\cdot II+II^2) \;=$$
$$=\; I^3+\underline{2\cdot I^2\cdot II}+\underline{I\cdot II^2}+\underline{II\cdot I^2}+\underline{2\cdot I\cdot II^2}+II^3 \;=$$
$$=\; I^3+3\cdot I^2\cdot II+3\cdot I\cdot II^2+II^3$$

Esempio

$(x+y)^3 \;=\; x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(3y^2-4x^3z)^3 \;=\; (3y^2)^3+3\cdot(3y^2)^2\cdot(-4x^3z)+3\cdot(3y^2)\cdot(-4x^3z)^2+(-4x^3z)^3 \;=$ $=\; 27y^6+3\cdot 9y^4\cdot(-4x^3z)+3\cdot(3y^2)\cdot 16x^6z^2-64x^9z^3 \;=$ $=\; 27y^6-108x^3y^4z+144x^6y^2z^2-64x^9z^3 \;=$

Potenza di un binomio

Per calcolare la potenza di un binomio con esponente un qualsiasi numero naturale è conveniente utilizzare il cosidetto Triangolo di Tartaglia.

Triangolo di Tartaglia

1	$(I+II)^0 \;=\; 1$
1 1	$(I+II)^1 \;=\; I+II$
1 2 1	$(I+II)^2 \;=\; I^2+2\cdot I\cdot II+I^2$
1 3 3 1	$(I+II)^3 = I^3+3\cdot I^2\cdot II+3\cdot I\cdot II^2+II^3$
1 4 6 4 1	$(I+II)^4 \;=\; I^4+4\cdot I^3II+6\cdot I^2\cdot II^2+4\cdot I\cdot II^3+II^4$
1 5 10 10 5 1	$(I+II)^5 \;=\; I^5+5I^4II+10I^3II^2+10I^2II^3+5I\cdot II^4+II^5$
1 6 15 20 15 6 1	$(I+II)^6 = I^6+6I^5II+15I^4II^2+20I^3II^3+15I^2II^4+6I\cdot II^5+II^6$

Esempio

$(x+y)^4 \;=\; x^4+4\cdot x^3y+6\cdot x^2\cdot y^2+4\cdot x\cdot y^3+y^4$
$(3y^2-4x^3z)^5 \;=$ $=(3y^2)^5+5(3y^2)^4(-4x^3z)+10(3y^2)^3(-4x^3z)^2+10(3y^2)^2(-4x^3z)^3+5(3y^2)\cdot(-4x^3z)^4+(-4x^3z)^5$ $=243y^{10}-1620x^3y^8z+4320x^6y^6z^2-576x^9y^4z^3+3840x^{12}y^2z^4-1024x^{15}z^5$

La divisione fra polinomi

Un polinomio è **divisibile** per un monomio (non nullo) se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio divisore, dà il polinomio iniziale.
Un polinomio è divisibile per un monomio se ogni suo termine è divisibile per tale monomio.

Dati due polinomi, il primo divisibile per il secondo, il loro **quoziente** è un monomio che ha:

- per coefficiente, il quoziente dei coefficienti
- per parte letterale, il quoziente delle parti letterali *(si esegue la differenza degli esponenti delle lettere uguali)* .

Divisione esatta fra due polinomi

Un polinomio A è **divisibile** per un polinomio B se esiste un polinomio Q che, moltiplicato per B, dà come prodotto A.	$A : B = Q \quad se\ e\ solo\ se \quad B \cdot Q = A$

Esempio

Il polinomio $A = x^5 + 5x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ è divisibile per il polinomio $B = x^2 + 3$
Infatti, esiste il polinomio $Q = x^3 + 2x - 1$ tale che: $(x^2 + 3)(x^3 + 2x - 1) = x^5 + 5x^3 - 5x^2 + 6x - 3$.

Divisione con resto fra due polinomi

La divisione fra due polinomi può essere eseguita anche se il polinomio dividendo non è divisibile per il polinomio divisore.
Dati due polinomi A e B nella variabile x, con il grado di B minore o uguale al grado di A, è sempre possibile ottenere due polinomi Q e R tali che: $A = B \cdot Q + R$ con Q polinomio quoziente e R polinomio resto.

Procedimento per effettuare la divisione con resto fra due polinomi

Per effettuare la divisione fra due polinomi $(7x^3+6x^4-5x\ +4):(x+2x^2-3)$ occorre:

1. ordinare i due polinomi secondo le potenze decrescenti della stessa lettera	$(+6x^4+7x^3-5x+4)\ :\ (2x^2+x-3)$
2. dividere il I° termine del dividendo per il I° termine del divisore	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{+6x^4}+7x^3 \qquad -5x+4 & \mathbf{2x^2}+x-3 \\ \cline{2-2} & \mathbf{3x^2} \end{array}$
3. moltiplicare l'opposto del quoziente ottenuto per il polinomio divisore	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & 2x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & \mathbf{3x^2} \end{array}$
4. sommare in colonna i termini simili	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & 2x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 \\ \cline{1-1} = \quad +4x^3+9x^2-5x+4 & \end{array}$
5. dividere il I° termine del resto parziale per il I° termine del divisore	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & \mathbf{2x^2}+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2\mathbf{+2x} \\ \cline{1-1} = \quad \mathbf{+4x^3}+9x^2-5x+4 & \end{array}$
6. moltiplicare l'opposto del II termine del quoziente per il polinomio divisore	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & 2x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2\mathbf{+2x} \\ \cline{1-1} = \quad +4x^3+9x^2-5x+4 & \\ -4x^3-2x^2+6x \qquad & \end{array}$
7. sommare in colonna i termini simili	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & 2x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2+2x \\ \cline{1-1} = \quad +4x^3+9x^2-5x+4 & \\ -4x^3-2x^2+6x \qquad & \\ \cline{1-1} = \quad +7x^2 \quad +x \quad +4 & \end{array}$
8. dividere il I° termine del resto parziale per il I° termine del divisore	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & \mathbf{2x^2}+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2+2x+\frac{7}{2} \\ \cline{1-1} = \quad +4x^3+9x^2-5x+4 & \\ -4x^3-2x^2+6x \qquad & \\ \cline{1-1} = \quad \mathbf{+7x^2} \quad +x \quad +4 & \end{array}$
9. moltiplicare l'opposto del III termine del quoziente per il polinomio divisore e sommare in colonna i termini simili.	$\begin{array}{r\|l} +6x^4+7x^3 \qquad -5x+4 & 2x^2+x-3 \\ \cline{2-2} -6x^4-3x^3+9x^2 \qquad\qquad & 3x^2+2x+\frac{7}{2} \\ \cline{1-1} = \quad +4x^3+9x^2-5x+4 & \\ -4x^3-2x^2+6x \qquad & \\ \cline{1-1} = \quad +7x^2 \quad +x \quad +4 & \\ -7x^2-\frac{7}{2}x+\frac{21}{2} & \\ \cline{1-1} = \quad -\frac{5}{2}x+\frac{29}{2} & \end{array}$

La divisione ha termine quando il grado del polinomio **resto** è minore del grado del polinomio **divisore**.

La regola di Ruffini

La regola di Ruffini è un procedimento per effettuare la divisione di un polinomio per un binomio del tipo $x - a$.

Per effettuare la divisione di un polinomio per un binomio del tipo $x - a$, con la regola di Ruffini occorre:

1. ordinare i due polinomi secondo le potenze decrescenti della stessa lettera

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x + 4) \; : \; (x - 3)$$

2. costruire la tabella di Ruffini ed inserire:
nella prima riga, i coefficienti dei termini del polinomio dividendo;
al primo posto della seconda riga, l'opposto del termine noto del divisore

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. abbassare il primo coefficiente del dividendo nella terza riga;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. moltiplicare il coefficiente appena abbassato per il numero rosso e scrivere il risultato sotto il secondo coefficiente del dividendo;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

5. sommare questo numero appena calcolato con il secondo coefficiente del dividendo e scrivere il risultato, incolonnato, nella terza riga

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & & \\ \hline & 2 & +3 & & \end{array}$$

6. moltiplicare il numero trovato per il numero rosso e scrivere il risultato sotto il terzo coefficiente del dividendo;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & +9 & \\ \hline & 2 & +3 & & \end{array}$$

7. sommare questo numero inserito con il terzo coefficiente del dividendo e scrivere il risultato, incolonnato, nella terza riga

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & +9 & \\ \hline & 2 & +3 & +4 & \end{array}$$

8. moltiplicare il numero trovato per il numero rosso e scrivere il risultato sotto il quarto coefficiente del dividendo;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & +9 & +12 \\ \hline & 2 & +3 & +4 & \end{array}$$

9. sommare questo numero inserito con il quarto coefficiente del dividendo e scrivere il risultato, incolonnato, nella terza riga

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -5 & +4 \\ 3 & & +6 & +9 & +12 \\ \hline & 2 & +3 & +4 & +16 \end{array}$$

Il quoziente ha per coefficienti i numeri ricavati nella terza riga. Tenendo conto poi, che il dividendo ha grado 3 e il divisore ha grado 1, il quoziente deve avere grado 2.

Pertanto il quoziente e il resto della divisione sono:

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 4$ e $R = +16$

Il teorema del resto

Il resto della divisione del polinomio $p(x) \ : \ (x-a)$ è uguale al valore che assume il polinomio $p(x)$ quando alla variabile x si sostituisce il valore a. In simboli: $R = p(a)$.

Dimostrazione

Dalla divisione $p(x) \ : \ (x-a)$ si ha: $p(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R$
Sostituendo ad x il valore a, si ottiene: $p(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R$
Cioè: $p(a) = 0 \cdot Q(a) + R$; $p(a) = R$.

Esempio

Calcolare il resto della divisione: $2x^3 - 5x^2 - 4x + 1 : \ (x+2)$

Soluzione

$R = p(-2) \ = \ 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 1 \ = \ -16 - 20 + 8 + 1 \ = \ -27$.

Il teorema di Ruffini

Un polinomio $p(x)$ è divisibile per il binomio $x - a$	$\Leftrightarrow$	$p(a) = 0$

Esempio

Il polinomio $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$ è divisibile per il binomio $x + 2$ perché $p(-2) = 0$
Infatti: $p(-2) \ = \ 2 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 6 \ = \ -16 + 16 - 6 + 6 = 0$

La differenza di due cubi

Il binomio $x^3 - a^3$ è divisibile per il binomio $x - a$.
Infatti: $p(a) = a^3 - a^3 = 0$.

Calcoliamo il quoziente mediante la regola di Ruffini.

$$Q(x) = x^2 + ax + a^2$$

	1	0	0	$-a^3$
a		$+a$	$+a^2$	$+a^3$
	1	$+a$	$+a^2$	0

Si ottiene quindi:

$$x^3 + a^3 = (x - a)(x^2 - ax + a^2)$$

Cioè la seguente regola:

La differenza di due cubi è uguale al prodotto fra la differenza delle due basi e il trinomio formato dal quadrato della prima base, dal quadrato della seconda base e dal prodotto (positivo) delle due basi.

In simboli:

$$I^3 - II^3 = (I - II) \cdot (I^2 + I \cdot II + II^2)$$

La somma di due cubi

Procedendo in modo analogo, si dimostra che il binomio $x^3 + a^3$ è divisibile per $x + a$.
Si ottiene quindi:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

Cioè la seguente regola:

La somma di due cubi è uguale al prodotto fra la somma delle due basi e il trinomio formato dal quadrato della prima base, dal quadrato della seconda base e dal prodotto (negativo) delle due basi.

In simboli:

$$I^3 + II^3 = (I + II) \cdot (I^2 - I \cdot II + II^2)$$

Esempi

$x^{30} - 27 \quad = \quad (x^{10})^3 - (3)^3 \quad = \quad (x^{10} - 3) \cdot (x^{20} + 3x^{10} + 9)$

$x^9 + 125y^{24} \quad = \quad (x^3)^3 + (5y^8)^3 \quad = \quad (x^3 + 5y^8) \cdot (x^6 - 5x^3y^8 + 25y^{16})$